**Přípravný kurz - přednášky**

# 1 Elementy logiky

Výroky budou formulovány v jazyce, který si zvolíme. Tak např. můžeme za elementární symboly zvolit přirozená čísla $1, 2, 3, \ldots$, dvoučlenné vztahy $\leq, =, <$ a symbol $+$ pro sčítání. Je jasné, že máme výroky pravdivé jako $1 = 1$, $2 + 1 = 3$ nebo $3 < 4$, ale i nepravdivé, které lze pomocí těchto základních symbolů zapsat např. $100 \leq 1$ či $10 = 9 + 2$. Jednoduché výroky lze skládat, např. "Jesliže $5 < 8$, pak $5 + 2 < 8 + 2$."

Výroky budeme značit velkými písmeny $A, B, C, \ldots$ a budeme jim přiřazovat pravdivostní hodnotu 1, pokud jsou pravdivé, a hodnotu 0, pokud jsou nepravdivé.

Opačný výrok neboli negaci výroku $A$ značíme $\neg A$. Pravdivostní hodnota výroku $A$ a výroku $\neg A$ je opačná. Dva výroky $A$ a $B$ lze spolu kombinovat a vytvářet tak nové výroky pomocí logických spojek $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ a $\Leftrightarrow$.

Zápis $A \wedge B$ čteme "platí $A$ a platí $B$", nebo "platí $A$ a současně $B$".
Zápis $A \vee B$ čteme "platí $A$ nebo platí $B$"
Zápis $A \Rightarrow B$ čteme "z platnosti $A$ plyne platnost $B$", nebo "$A$ implikuje $B$", nebo "když platí $A$, pak platí $B$".
Zápis $A \Leftrightarrow B$ čteme "$A$ platí právě tehdy, když platí $B$", nebo "$A$ je ekvivalentní s $B$".

Pravdivostní hodnota kombinace dvou výroků pak závisí na druhu použité spojky a pravdivostních hodnotách samotných $A$ a $B$, tak jak to ukazuje tabulka:

| $A$ | $B$ | $A \wedge B$ | $A \vee B$ | $A \Rightarrow B$ | $A \Leftrightarrow B$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Podle tabulky tedy například tvrzení "když země je plochá, pak já jsem papež" je pravdivé vždy, ať to řekne Karol Wojtyla, nebo kdokoliv jiný. Zato tvrzení "země je plochá pravě tehdy, když já jsem papež" by v ústách Karola Wojtyly bylo lží.

Už na předchozím příkladě jsme viděli, že o pravdivosti tvrzení lze někdy rozhodnout až potom, co dosadíme za neznámou veličinu konkrétní hodnotu. V předchozím případě to byla osoba mluvčího. Podobně o pravdivosti "$x > 2$" lze rozhodovat, až když dosadíme za proměnnou $x$ nějaké číslo.

Výraz $A(x)$ obsahující proměnnou $x$, který se po dosazení za $x$ stane výrokem, nazýváme výroková forma. Z výrokové formy lze vytvořit výrok i tak, že jej kvantifikujeme, t.j. buď prohlásime, že $A(x)$ je pravdivý pro každou hodnotu proměnné $x$, zapsáno

$$(\forall x)(A(x))$$

nebo prohlásíme, že výrok $A(x)$ je pravdivý alespoň pro jednu hodnotu $x$, formálně zapsáno

$$(\exists x)(A(x))$$

Znak $\forall$ (převrácené písmeno A, v angličtině a v němčině lze odvodit od "all" resp. "allgemeine") nazýváme obecný kvantifikátor a zápis $\forall x$ čteme "pro každé $x$", "pro všechna $x$", "ať je $x$ jakékoliv", "pro libovolné $x$", ap. Znak $\exists$ (převrácené písmeno E, ze slova existuje) se nazývá existenční kvantifikátor a zápis $\exists x$ čteme "existuje $x$", "lze nalézt $x$", ap.

Proměnná ve výrokové formě může sestávat z více objektů, např. proměnnou ve výrokové formě "x>y" je dvojice čísel $x$ a $y$, v tomto případě někdy mluvíme o dvou, třech atd. proměnných výrokové formy. Aby se výroková forma stala výrokem, každá z proměnných musí být kvantifikovaná. Např. výraz $(\forall x)(\sin x < y)$ není výrokem, o jeho pravdivostní hodnotě nelze rozhodovat. Naproti tomu $(\exists y)(\forall x)(\sin x < y)$ je výrokem pravdivým.

Pořadí, v jakém umíst ujeme kvantifikátory jednotlivých proměných je důležité a může mít vliv na pravdivostní hodnotu výroku. Dva následující výroky jsou toho dokladem:

$$(\forall x)(\exists y)(y \text{ je otcem } x) \qquad \text{a} \qquad (\exists y)(\forall x)(y \text{ je otcem } x)$$

Je zvykem zkracovat zápis některých výroků tvaru

$$(\exists x)\big(A(x) \wedge B(x)\big) \qquad \text{a} \qquad (\forall x)\big(A(x) \Rightarrow B(x)\big)$$

na tvar

$$(\exists x, A(x))(B(x)) \qquad \text{resp.} \qquad (\forall x, A(x))(B(x))$$

Použijeme to hlavně v případech, kdy $A(x)$ je jednoduchá výroková forma. Např.

$$(\exists x, x > 0)(x^2 - x + 1 = 0) \qquad \text{znamená} \qquad (\exists x)\big((x > 0) \wedge (x^2 - x + 1 = 0)\big)$$

$$(\forall x, x \in \mathbb{N})(\sin(\pi x) = 0) \qquad \text{znamená} \qquad (\forall x)\big((x \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\sin(\pi x) = 0)\big)$$

Kapitolu o výrocích zakončíme připomínkou pravidel pro negování výroků a na příkladě ukážeme jejich použití.

| | výrok | jeho negace |
|---|---|---|
| 1. | $\neg A$ | $A$ |
| 2. | $A \wedge B$ | $(\neg A) \vee (\neg B)$ |
| 3. | $A \vee B$ | $(\neg A) \wedge (\neg B)$ |
| 4. | $A \Rightarrow B$ | $A \wedge (\neg B)$ |
| 5. | $A \Leftrightarrow B$ | $\big(A \wedge (\neg B)\big) \vee \big((\neg A) \wedge B\big)$ |
| 6. | $(\forall x)\big(A(x)\big)$ | $(\exists x)\big(\neg A(x)\big)$ |
| 7. | $(\exists x)\big(A(x)\big)$ | $(\forall x)\big(\neg A(x)\big)$ |

Negujeme-li výrok $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$, dostaneme aplikováním pravidel (1) a (4) výrok $(\neg B) \wedge A$. Vidíme, že výrok $A \Rightarrow B$ a výrok $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ mají formálně stejnou negaci, což znamená, že i výroky samotné mají stejnou pravdivostní hodnotu, ať za výrok $A$ a $B$ je dosazené jakékoliv tvrzení. Toho se často využívá při důkazech matematických vět, kdy místo vyvozování, že z pravdivosti $A$ plyne pravdivost $B$, můžeme vyvozovat, že z neplatnosti $B$ plyne neplatnost $A$.

Obdobně výrok $A \wedge B$ je jednak negací výroku $(\neg B) \vee (\neg A)$ a také výroku $B \Rightarrow (\neg A)$. Proto výrok $(\neg B) \vee (\neg A)$ a výrok $B \Rightarrow (\neg A)$ mají stejnou pravdivostní hodnotu nezávislé na samotných výrocích $A$ a $B$. To formálně lze zapsat

$$\Big((\neg B) \vee (\neg A)\Big) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Big(B \Rightarrow (\neg A)\Big) \tag{$*$}$$

Posledním příkladem bude negace výroku obsahujícího kvantifikátor

$$(\exists x)\big((x > 0) \wedge (x^2 - x + 1 = 0)\big).$$

Protože výrok začíná existenčním kvantifikátorem a pak následuje kombinace dvou výrokových forem pomocí spojky $\wedge$, použijeme pro negaci pravidlo z posledního a 2. řádku tabulky. Dostaneme

$$(\forall x)\big((x \leq 0) \vee (x^2 - x + 1 \neq 0)\big)$$

Podle pravidla (*), můžeme tuto negaci dále upravit

$$(\forall x)\big((x > 0) \Rightarrow (x^2 - x + 1 \neq 0)\big)$$

Zápis tohoto výroku pak lze ještě zkrátit na

$$(\forall x,\ x > 0)(x^2 - x + 1 \neq 0)$$

Připomeňme, že výrok, který jsme v tomto příkladě negovali, má zkrácený zápis

$$(\exists x,\ x > 0)(x^2 - x + 1 = 0).$$

Snadno z toho zobecníme zákonitosti pro negaci výroků zapsaných ve zkráceném tvaru:

$$\neg\Big(\big(\exists x,\ A(x)\big)\big(B(x)\big)\Big) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Big(\big(\forall x,\ A(x)\big)\big(\neg B(x)\big)\Big)$$

resp.

$$\neg\Big(\big(\forall x,\ A(x)\big)\big(B(x)\big)\Big) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Big(\big(\exists x,\ A(x)\big)\big(\neg B(x)\big)\Big)$$

# 2 Množiny

Pojem množina hraje důležitou roli v každé oblasti moderní matematiky. Ačkoliv se zdá jednoduché a přirozené definovat množinu jako souhrn objektů, vede zcela svobodné a bezuzdné používání této definice k různým podivným situacím, tzv. paradoxům. Z toho důvodu ponecháme tento pojem nedefinovaný (stejně tak je tomu v geometrii s pojmy bod a přímka) a budeme množiny popisovat jednoduše jejich vlastnostmi. V přednášce z matematické analýzy budeme používat hlavně čísla z konkrétních "malých" množin (jako jsou rálná a komplexní čísla) a vyhneme se konstruování "velkých" množin, které mohou vést ke zmíněným problémům.

Množiny budeme označovat zpravidla pomocí písmen velké abecedy: $A, B, \ldots, M, N, \ldots$ a podobně a prvky, nazývané též elementy množin budeme značit většinou malými písmeny $a, b, \ldots, x, y, \ldots, m, n, \ldots$.

Skutečnost, že množina $M$ obsahuje prvek $x$, se označí pomocí symbolu $\in$ (což je stylizované řecké písmeno $\varepsilon$ - "epsilon"); $x \in M$, čteme "$x$ (je) prvkem $M$".

Množina s prvky 1,37 a 55 se zapíše $\{1, 37, 55\}$. Zápisy $\{37, 55, 1\}$ a $\{1, 37, 1, 55, 55, 1\}$ znamenají všechny totéž, tedy vícenásobný výskyt téhož prvku se ignoruje, týž prvek se nemůže v jedné množině vyskytnout dvakrát. Tři tečky v zápisu množiny $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ znamenají ovšem "a dále podobně, podle stejné zákonitosti", t.j. v uvedeném případě množinu všech sudých přirozených čísel. Příslušná zákonitost, by ovšem měla být na první pohled patrná.

Složitější a zajímavější množiny se zpravidla tvoří výběrem prvků již známé množiny pomocí nějakého pravidla. Množinu všech druhých mocnin přirozených čisel bychom mohli zapsat například

$$\{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\} \qquad \text{nebo taky} \qquad \{n \in \mathbb{N} \mid (\exists k \in \mathbb{N})(k^2 = n)\}\ .$$

Obecně budeme množiny všech prvů $x \in M$, pro které je pravdivá výroková forma $A(x)$, zapisovat ve tvaru $\{x \in M \mid A(x)\}$. V případě, že $M$ značí množinu všech $x$, která lze do výrokové formy dosazovat, budeme používat i značení $\{x \mid A(x)\}$.

Dvě množiny $A$ a $B$ jsou stejné, zapsáno $A = B$, když $A$ a $B$ mají stejné prvky. Množina $A$ se nazývá podmnožina množiny $B$, zapsáno $A \subset B$, když každý prvek množiny $A$ je obsažen v množině $B$. Zřejmě, $A = B$, když současně platí $A \subset B$ a $B \subset A$. Když $A \subset B$ a $A \neq B$, nazýváme $A$ vlastní podmnožinou množiny $B$. Důležitá je množina neobsahující žádný prvek. Taková množina existuje pouze jedna a je zvykem ji značit $\emptyset$ a nazývat prázdná množina. Prázdná množina je podmnožinou každé množiny.

## 2.1 Operace s množinami

Když $A$ a $B$ jsou dvě množiny, definujeme

- sjednocení $A \cup B$ množin $A$ a $B$

$$A \cup B = \{\, x \mid x \in A \text{ nebo } x \in B\};$$

- průnik $A \cap B$ množin $A$ a $B$

$$A \cap B = \{\, x \mid x \in A \text{ a } x \in B\};$$

- rozdíl $A \backslash B$ množin $A$ a $B$

$$A \backslash B = \{\, x \mid x \in A \text{ a } x \notin B\}.$$

Množiny $A$ a $B$ nazývame disjunktní, když $A \cap B = \emptyset$. Zvětšené symboly $\bigcup$ a $\bigcap$ se používají podobně jako symboly $\sum$ a $\prod$. Jsou-li tedy $A_1, \ldots, A_n$ množiny, můžeme jejich sjednocení napsat

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

a podobně pro průnik. Uvědomme si, že tento zápis je možný jen díky tomu, že operace sjednocení a průniku množin jsou asociativní. Jinými slovy, že pro každou trojici množin $A, B, C$ platí

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \qquad \text{a} \qquad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

V důsledku toho nezávisí na způsobu "uzávorkování" sjednocení tří, a obecně $n$, množin. Operace $\cup$ a $\cap$ jsou ovšem i komutativní, neboli spňují vztahy

$$A \cap B = B \cap A \qquad \text{a} \qquad A \cup B = B \cup A\ .$$

Komutativita a asociativita operací je ještě doplněná jejich distributivitou:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad \text{a} \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Důkazy zmíněných vztahů jsou pouze jednoduchým použitím definic a distributivity logických spojek "a", "nebo". Ilustrujme to na poslední rovnosti.

$$x \in A \cup (B \cap C) \Longleftrightarrow x \in A \text{ nebo } x \in B \cap C \Longleftrightarrow x \in A \text{ nebo } (x \in B \text{ a } x \in C) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x \in A \cup B \text{ a } x \in A \cup C \Longleftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Mnohem názornější je důkaz pomocí Vennova diagramu pro příslušné tři množiny.

# 3 Relace

Jestliže $x$ a $y$ jsou prvky (nějakých množin), zavedeme symbol $(x, y)$ pro uspořádanou dvojici prvků $x$ a $y$. Předpokládáme tedy, že platí

$$(x, y) = (z, t) \quad \text{právě když} \quad x = z \text{ a } y = t.$$

Podobně definujeme i uspořádanou $n$-tici prvků $x_1, x_2, \ldots, x_n$, jíž označujeme $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

**Definice:** Nechť $A$ a $B$ jsou množiny. Symbolem $A \times B$ označujeme množinu všech uspořádaných dvojic tvaru $(x, y)$, kde $x \in A$ a $y \in B$. Formálně zapsáno

$$A \times B = \{\, (x, y) \mid x \in A,\, y \in B \,\}.$$

$A \times B$ se nazývá kartézský součin množin $A$ a $B$.

Název "kartézský součin" pochází z geometrické interpretace (a původně tedy jména Descartes[1]): Když např. $A = B = \mathbb{R}$, potom $A \times B$ můžeme interpretovat jako všechny body roviny, a v tomto případě $x$ a $y$ jsou kartézské souřadnice bodu $(x, y)$. Kartézský součin $A \times A$ někdy zapisujeme jako mocninu, t.j. $A^2$, a podobně $A^3 = A \times A \times A$ atd.

**Definice:** Relace mezi množinami $A$ a $B$ je libovolná podmnožina $\mathcal{R}$ kartézského součinu $A \times B$. Je-li $A = B$, mluvíme o relaci na $A$. Náleži-li dvojice $(x, y)$ relaci $\mathcal{R}$, t.j., $(x, y) \in \mathcal{R}$, říkáme také, že $x$ a $y$ jsou v relaci $\mathcal{R}$, a zapisujeme též $x\mathcal{R}y$.

**Příklad 1:** Množinu všech podmnožin množiny $A$ označíme $\mathcal{P}(A)$. Této množině se také říká potenční množina, proto písmeno $\mathcal{P}$ v označení. Na $\mathcal{P}(A)$ zavedeme relaci $\mathcal{R}_1$ takto

$$X\mathcal{R}_1Y \iff X \subset Y$$

**Příklad 2:** Řekneme, že přímky $p$ a $q$ v rovině jsou v relaci $\mathcal{R}_2$, když $p$ a $q$ jsou rovnoběžné.

**Příklad 3:** Řekneme, že přímky $p$ a $q$ v rovině jsou v relaci $\mathcal{R}_3$, když $p$ a $q$ jsou na sebe kolmé.

**Příklad 4:** Na množině studentů FJFI zavedeme relaci podle data jejich narození. Řekneme, že dva studenti jsou v relaci $\mathcal{R}_4$, jestliže se narodili ve stejný den.

**Příklad 5:** Na množině $\mathbb{N}$ definujeme relaci $m\mathcal{R}_5n$, když m dělí $n$.

Jak vidíme, relace v sobě muže zahrnovat vztahy mezi různými objekty. Mezi nejdůležitější relace používané v matematice patří relace ekvivalence a uspořádání.

**Definice:** Řekneme, že relace $\mathcal{R}$ na množině $M$ je ekvivalence, když má následující tři vlastnosti

- pro každé $x \in M$ platí $x\mathcal{R}x$ (reflexivita)
- kdykoliv $x\mathcal{R}y$, pak i $y\mathcal{R}x$ (symetrie)
- ze vztahů $x\mathcal{R}y$ a $y\mathcal{R}z$ plyne $x\mathcal{R}z$ (tranzitivita)

[1] René Descartes nebo Cartesius (1596-1650), významný francouzský filozof a matematik, zakladatel analytické geometrie

Podívejme se, které relace z příkladů 1-5 jsou ekvivalence. Snadno nahlédneme, že
– relace $\mathcal{R}_1$ není ekvivalencí, protože není symetrická, je ale tranzitivní a reflexivní;
– relace $\mathcal{R}_2$ je evivalencí;
– relace $\mathcal{R}_3$ není ekvivalencí, protože není ani reflexivní ani tranzitivní, je ale symetrická;
– relace $\mathcal{R}_4$ je ekvivalencí;
– relace $\mathcal{R}_5$ není ekvivalencí, protože není symetrická, je ale tranzitvní a reflexivní.

Pojem ekvivalence je zastřešující pojem pro všechny pojmy vyjadřující stejnost, podobnost, izomorfii. Relace ekvivalence se zpravidla značí znaky $\equiv, \sim, \approx, =$ a podobně.

Nechť $\mathcal{R}$ je ekvivalence na množině $M$ a $x$ libovolný prvek $M$. Označme $\mathcal{R}[x]$ množinu všech prvků $y$, které jsou ekvivalentní s $x$. $\mathcal{R}[x]$ se nazývá třída ekvivalence určená prvkem $x$. Platí následující tvrzení:

$$\text{Pro každé dva prvky } x, y \text{ množiny } M \text{ buď } \mathcal{R}[x] = \mathcal{R}[y], \text{ nebo } \mathcal{R}[x] \cap \mathcal{R}[y] = \emptyset.$$

To umožňuje napsat množinu $M$ jako sjednocení disjunktních tříd ekvivalence. Např. množinu všech studentů FJFI lze rozdělit podle ekvivalence $\mathcal{R}_4$ do disjunktních množin takto: ti, co slaví narozeniny 1.ledna by byli v jedné třídě, ti, co slaví 2. ledna v další, atd.

Jiným důležitým typem relace je uspořádání, obvykle značené symbolem $\leq$ nebo $\preceq$.

**Definice:** Relace $\leq$ na množině $M$ se nazývá uspořádání, když má následující tři vlastnosti:

- pro každé $x \in M$ platí $x \leq x$ (reflexivita)
- jestliže $x \leq y$ a $y \leq x$, pak $x = y$ (antisymetrie)
- jestliže $x \leq y$ a $y \leq z$, pak $x \leq z$ (tranzitivita)

Mezi relacemi z příkladů 1-5 pouze $\mathcal{R}_1$ a $\mathcal{R}_5$ jsou uspořádání. Při uspořádnání na $\mathbb{N}$ podle dělitelnosti snadno najdeme dvojici prvků, např. 3 a 5, že ani 3 není v relaci s 5, ani 5 není v relaci s 3. Podobná situace nastane i při $\mathcal{R}_1$. Podívejme se na jiné uspořádání na množině $\mathbb{N}$, a to uspořádání přirozených čísel podle velikosti. Při tomto uspořádání pro každý pár $m, n \in \mathbb{N}$ platí $m \leq n$ nebo $n \leq m$. Takové uspořádání nazýváme úplným.

# 4 Zobrazení

**Definice:** Zobrazení množiny $A$ do množin $B$ je relace $f \subset A \times B$, splňující dodatečnou podmínku, že pro každý prvek $x \in A$ existuje právě jediný prvek $y \in B$ tak, že $xfy$.

To, že $f$ je zobrazení množiny $A$ do množiny $B$, zapisujeme takto:

$$f : A \mapsto B$$

Pro zobrazení se ovšem nepoužívá značení zavedeného pro relace. Je-li $f \subset A \times B$ relací, která je zobrazením, $f(x)$ označuje to jediné $y \in B$, pro něž $xfy$. Říkáme, že prvku $x$ je přiřazen prvek $y = f(x)$; $y$ nazýváme též hodnota zobrazení $f$ v bodě $x$ nebo obraz prvku $x$ při zobrazení $f$. Prvku $x$ říkáme vzor prvku $y$ při zobrazení $f$. Množina $A$ se nazývá definiční obor zobrazení $f$ a také značí $D_f$. Množina obrazů při zobrazení $f$ se nazývá obor hodnot zobrazení $f$ a značí $H_f$. Obor hodnot lze také formálně zapsat

$$H_f = \{\, y \in B \,|\, \exists x \in A,\ y = f(x) \,\}$$

Říkáme, že dvě zobrazení $f : A \mapsto B$ a $g : A \mapsto B$ se rovnají, zapsáno $f = g$, když $f(x) = g(x)$ pro každé $x \in A$. Rovnat se tedy mohou jenom zobrazení se stejným definičním oborem $A$.

V matematické analýze budeme pracovat se zobrazeními, kde obrazy i vzory budou reálná čísla. Takovým zobrazením se říká funkce. Funkce budou nejčastěji zadávané předpisem, jak k číslu $x$ vypočítat jeho obraz, číslo $y$. Např.

$$y = \frac{\sqrt{x-1}}{x-2}$$

Nevymezíme-li hodnoty $x$, kterým předpis má přiřadit obraz, budeme automaticky za přirozený definiční obor považovat všechna $x$, pro která má použití předpisu smysl. V našem případě je $D_f = \langle 1, 2) \cup (2, +\infty)$. Někdy se lze setkat i se zápisem zobrazení

$$f : (A) \mapsto B \ .$$

Uzávorkování množiny $A$ znamená, že předpis pro výpočet $f(x)$ nemusí mít smysl pro všechny prvky z $A$. V tomto případě je nutné najít přirozený definiční obor $D_f \subset A$.

Předpis pro zadání zobrazení může mít i tvar

"$x$ přiřaď $y$ tak, aby platilo $y^5 + y = x^2$ "

nebo

"číslu $x$ přiřaď číslo 1, když v desítkovém zápisu čísla $x$ se za desetinnou tečkou od nějakého místa vyskytuje 100 po sobě jdoucích nul, v opačném případě přiřaď číslu $x$ číslo 0"

Těžko říct, zda někdo ze smrtelníků ví, co toto pravidlo přiřadí číslu $\pi$. Nicméně i tento předpis definuje zobrazení [2].

Předtím než zavedeme další užitečné pojmy, definujeme dvě zobrazení, na kterých budou tyto pojmy ilustrovány:

**Příklad 6:**

$$f_1(x) = \sqrt{x}, \qquad\qquad f_2(x) = \sqrt{|x|}$$

Přirozeným definičním oborem $D_{f_1}$ je interval $\langle 0, +\infty)$, zatímco $D_{f_2} = \mathbb{R}$.

– Zobrazení $h : M \cap A \mapsto B$ je **zúžením zobrazení** $f : A \mapsto B$ na množinu $M$, když $f(x) = g(x)$ pro každé $x \in M \cap A$. Symbolicky zapisujeme $h = f/_M$

Pro funkce z příkladu 6 platí $f_1 = f_2/_{\langle 0, +\infty)}$

**Obraz množiny** $M$ při zobrazení $f : A \mapsto B$ je

$$f(M) = \{\, y \in B \,|\, (\exists x \in A \cap M) \ (y = f(x)) \,\}$$

což lze taky zapsat $\quad f(M) = \{\, f(x) \,|\, x \in A \cap M\}$

[2] Pojem funkce je základním pojmem matematické analýzy. Trvalo dlouho, než se dospělo k dnešnímu chápání funkce (jakožto speciálního typu relace); například v době, kdy byl objeven diferenciální počet, musela být "poctivá" funkce vyjádřena nějakou formulí jako např. $f(x) = \sqrt{\sin(x/\pi)}$. To, že reálná funkce může přiřazovat každému číslu nějaké zcela libovolné číslo, je celkem moderní vynález.

Obor hodnot tedy není nic jiného, než obraz definičního oboru při zobrazení $f$, tj. $H_f = f(D_f)$ Je-li množina $M = (-2, -1\rangle$, pak $f_1(M) = \emptyset$ a $f_2(M) = \langle 1, \sqrt{2})$.

**Vzor množiny** $M$ při zobrazení $f : A \mapsto B$ je

$$f^{-1}(M) = \{\, x \in A \,|\, (\exists y \in M)\ (y = f(x)) \,\}$$

což lze taky zapsat $f^{-1}(M) = \{\, x \in A \,|\, f(x) \in M \,\}$.

Pro $M = (2, 3)$ je $f_1^{-1}(M) = (4, 9)$ a $f_2^{-1}(M) = (-9, -4) \cup (4, 9)$.

**Definice:** Jsou-li $f : A \mapsto B$, $g : B \mapsto C$ zobrazení, potom můžeme definovat nové zobrazení $h : A \mapsto C$ předpisem $h(x) = g(f(x))$. Toto zobrazení se nazývá **složení** zobrazení $g$ a $f$ a značí se $g \circ f$. Platí tedy

$$\big(g \circ f\big)(x) = g(f(x))$$

Uvažujme zobrazení $f, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dané předpisem

$$f(x) = \sin x \qquad \text{a} \qquad g(x) = x^2$$

Složení $(f \circ g)(x) = \sin(x^2)$ a $(g \circ f)(x) = (\sin x)^2$ jsou dvě různá zobrazení, například proto, že obor hodnot $f \circ g$ je interval $\langle -1, 1\rangle$, zatímco obor hodnot $g \circ f$ je pouze interval $\langle 0, 1\rangle$. Tento příklad ukazuje, že obecně

$$g \circ f \neq f \circ g.$$

Skládání funkcí tedy není komutativní. Snadno se však přesvědčíme, že je asociativní, t.j.

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

pro každé tři funkce s definičními obory umožňujícími toto skládání.

**Definice: (Důležité druhy zobrazení)** Zobrazení $f : A \mapsto B$ nazýváme

- **injektivní** (neboli prosté) zobrazení, jestliže pro každou dvojici různých proměnných $x, y \in A$ je $f(x) \neq f(y)$,
- **surjektivní** zobrazení (neboli zobrazení na), jestliže pro každé $y \in B$ existuje $x \in A$ splňující $f(x) = y$,
- **bijektivní** (neboli vzájemně jednoznačné) zobrazení, jestliže $f$ je injektivní a surjektivní.

Tyto pojmy lze přeformulovat i jiným způsobem. Např. zobrazení $f$ je prosté, jestliže vzor každé jednoprvkové množiny $\{b\} \subset B$ je nanejvýš jednoprvková množina.
Zobrazení $f$ je na, pokud vzor každé jednoprvkové množiny $\{b\} \subset B$ je alespoň jednoprvková množina, nebo ještě jinak, pokud $H_f = B$.

Zobrazení množiny $A$ do stejné množiny $A$, které prvku $x$ přiřazuje sama sebe, nazýváme **identické** zobrazení na množině $A$, nebo identita na $A$ a značíme $Id_A$. Identita je zřejmě zobrazení, které je bijektivní.

$$Id_A : A \mapsto A, \qquad Id_A(x) = x$$

**Definice:** Je-li $f : A \mapsto B$ prosté zobrazení, pak každému prvku $x$ z oboru hodnot $H_f$ lze najít právě jedno $y$ z množiny $A$ tak, že $x = f(y)$. Toto přiřazení nazýváme **inverzní** zobrazení k zobrazení $f$.

Jak už bylo řečeno, při prostém zobrazní $f$ je vzorem jednoprvkové množiny $\{x\} \subset H_f$ opět jednoprvková množina $f^{-1}(\{x\})$. A právě inverzní zobrazení přiřazuje prvku $x \in H_f$ jediný prvek $y \in f^{-1}(\{x\})$. Proto je zvykem značit obraz při inverzním zobrazení jako $y = f^{-1}(x)$, aniž by docházelo k omylům.

Vlastnosti inverzního zobrazení:

$$D_{f^{-1}} = H_f \ , \qquad H_{f^{-1}} = D_f$$

$$f^{-1} \circ f = Id_{D_f} \ , \qquad f \circ f^{-1} = Id_{H_f}$$