Ukázka příkladů s vhodnou náročností pro výuku pro první cca 4 týdny

logika

- Výrok zapsat pomocí kvantifikátorů, pak znegovat a rozhodnout o pravdivosti:
  1. Rovnice $|x+5| > |3-x|$ nemá reálné řešení.
  $$(\forall x \in \mathbb{R})(|x+5| \leq |3-x|)$$
  2. Žádný reálný kořen rovnice $x^2 - x + 3 = 0$ není kladný.
  $$(\forall x \in \mathbb{R})\Big((x^2 - x + 3 = 0) \Rightarrow (x \leq 0)\Big)$$
  nebo
  $$(\forall x \in \mathbb{R})\Big((x > 0) \Rightarrow (x^2 - x + 3 \neq 0)\Big)$$
  nebo
  $$(\forall x \in \mathbb{R})\Big((x \leq 0) \vee (x^2 - x + 3 \neq 0)\Big)$$
  3. Když součet dvou rálných čísel je alespoň 2, pak nemohou být obě menší než 1.
  4. ap. lze využít cvičení 207, 211 na další procvičení doma.
- Ukázat důležitost pořadí kvantifikátorů.
  $$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x + y = 2)$$
  $$(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})(x + y = 2)$$
  Předveďte jim, co znamená ukázat, že první výrok je pravdivý, a co znamená ukázat, že druhý výrok je nepravdivý.
- Procvičit pojem "nutná podmínka" , "postačující podmínka".
  Oznámení: *Ženy mají na stadion Sparty vstup zdarma.*
  "Býti ženou" je postačující podmínka na vstup zdarma.
  Oznámení: *Muži nemají na stadion Sparty vstup zdarma.*
  "Býti ženou" je nutná podmínka na vstup zdarma.

zobrazení Procvičovat pojmy "prosté", "na", "obor hodnot", atd.; u všeho nejdříve zapsat, co se má dokázat, resp. jakou množinu hledáme pro tu kterou naši konkrétní funkci.

1. $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{pro } x \text{ sudé;} \\ \frac{1+x}{2}, & \text{pro } x \text{ liché.} \end{cases}$$
Namalujte obrázek, co se děje.
Úkoly: vyšetřete, zda f je prosté, zda je "na $\mathbb{N}$", jak vypadá obraz množiny $M = \{3,4,5\}$, jak vypadá vzor množiny $M = \{3,4,5\}$

2. $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Z}$
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{pro } x \text{ sudé;} \\ \frac{1-x}{2}, & \text{pro } x \text{ liché.} \end{cases}$$
Namalujte obrázek, co se děje.
Úkoly: vyšetřete, zda f je prosté, zda je "na $\mathbb{Z}$", nalezněte inverzní funkci

3. $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$
$$f(m,n) = mn$$
Úkoly: vyšetřete, zda f je prosté, zda je "na $\mathbb{N}$", co je vzor množiny $M = \{15\}$.

4. $f : \mathbb{R} - \{1\} \mapsto \mathbb{R}$
$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$
Úkoly: vyšetřete, zda f je "na $\mathbb{R}$", obor hodnot, zda je prosté, nalezněte inverzní funkci, co je vzor množiny $M = (2,3)$

5. $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$
$$f(x) = |x+3|$$
Úkoly: vyšetřete, zda f je "na $\mathbb{R}$", obor hodnot, zda je prosté, co je vzor množiny $M = \langle 1, 2)$

6. $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$
$$f(x) = |x| + x$$
Úkoly: vyšetřete, zda obor hodnot, zda je prosté, co je vzor množiny $M = (0,2)$, resp. $M = \langle 0, 2\rangle$.

7. $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$
$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$
Úkoly: vyšetřete, zda f je prosté, obor hodnot, co je vzor množiny $M = \{\frac{2}{5}, -\frac{2}{5}\}$, určete všechna $a \in \mathbb{R}$, že $f^{-1}(\{a\})$ je jednoprvková, určete všechna $a \in \mathbb{R}$, že $f^{-1}(\{a\})$ je prázdná.

8. $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$
$$f(x) = [x] = \text{nejmenší celé číslo nepřevyšující } x$$
Namalujte obrázek. Úkoly: obor hodnot, vzor množiny $M = \{1, 2, 4\}$

9. $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$
$$f(x) = x^2$$
Úkoly: vzor množiny $\mathbb{R}$, obraz imaginární osy, vzor množiny $M = \{x \in \mathbb{C} \mid |x| = 1\}$, obor hodnot.

dodatky k funkcím skládání $f \circ g$ a $g \circ f$

1. Probrat složení funkcí

$$f(x) = x^2 \quad \text{a} \quad g(x) = \sqrt{x}$$

2. Složení funkcí

$$f(x) = \operatorname{tg} x \quad \text{a} \quad g(x) = \sqrt{x}$$

   rozebrat definiční obor obou složení, což implikuje, že funkce $f(g(x))$ a $g(f(x))$ jsou různé

3. Rozebrat složení $f(x) = \sin x$ a $g(x) = 2x$ Definiční obory stejné, ne obory hodnot. Malovat obrázky $\sin(2x)$, $2\sin x$.

4. Probrat, jak z grafu nějaké funkce $f(x)$ vzniknou grafy funkcí

$$2f(x), \quad \frac{1}{2}f(x), \quad f(2x), \quad f(x/2), \quad f(x-1), \quad f(x+1), \quad f(-x), \quad -f(x)$$

hyperbolické funkce Definujte $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ (tvařte se, že číslo e už znají). Odvoďte inverzní k nim, resp. k súžení, malujte obrazky. Odvoďte, že

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

$$\operatorname{sh}(2x) = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$$

cyklometrické funkce Definujte $\arcsin x$, $\arccos x$ atd., hlavně zdůrazňovat D_f a H_f. Malovat obrázky.

1. Určovat hodnoty funkce arcsin a jiných ve "známých" bodech.

2. Pohovořit o skládání

$$\sin(\arcsin x) \quad \text{a} \quad \arcsin(\sin x)$$

3. Ukázat vztah

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

omezenost Rozhodnout o omezenosti zdola, shora, resp. o omezenosti. Zapisovat, co právě dokazujeme.

1. $\{3 - n \mid n \in \mathbb{N}\}$
2. $\{3 - x \mid x \in \mathbb{R}\}$
3. $\{x \in \mathbb{R} \mid 2(1-x) + 5 \in \langle 0, 1\rangle\}$
4. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 5x - 6 \in (-1, +\infty)\}$
5. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^{10} + 4x^7 - 33 = 0\}$ Už by měli vědět, že to je konečná množina
6. $\left\{\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$
7. $\left\{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$

8. $\{x \in \mathbb{C} \ \mid\ |x-1| < 2\}$ interpretovat pomocí vzdálenosti v $\mathbb{C}$, namalovat M
9. $\{x \in \mathbb{C} \ \mid\ |x-1| = |x+1|\}$ interpretovat pomocí vzdálenosti v $\mathbb{C}$, namalovat M

supremum, infimum Dokázat, že dané číslo je sup, resp. inf, kdy je to max, kdy min, pořád zapisovat, co se děje.

1. $M = \left\{\frac{n}{n+1} \ \mid n \in \mathbb{N}\right\}, \quad \inf M = \frac{1}{2}, \quad \sup M = 1$
2. $M = \{n^2+n+1 \ \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \inf M = 3, \quad \sup M = +\infty$
3. $M = \left\{\frac{2n^2+n+11}{n^2+5} \ \mid n \in \mathbb{N}\right\}, \quad \sup M = \frac{7}{3}, \quad \inf M = 2$
4. $M = \left\{\frac{1+(-1)^n}{2} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \ \mid n \in \mathbb{N}\right\}, \quad \sup M = 1, \quad \inf M = 0$
5. $M = \left\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \ \mid n \in \mathbb{N}\right\}, \quad \inf M = 0, \quad \sup M =?$ nechť to zkusí určit
6. $M = \left\{\frac{x}{|x|+1} \ \mid x \in \mathbb{R}\right\}, \quad \sup M = 1, \quad \inf M = -1$
7. $M = \{x^3 - x^2 - x + 2 \mid x \in \langle 0, 2\rangle\}, \quad \sup M = 4, \quad \inf M = 1$
   Oproti zadání ze skript interval pro x je uzavřený, tedy se nabývá maxima i infima a není problém s 2. vlastnosti. Můžete zkusit, když se Vám to bude zdát vhodné, i variantu s otevřeným intervalem.

Nepřehánět se složitostí, vše pak budeme řešit limitami resp. vyšetřením průběhu funkce.