Cvičení MAB2 LS 2007/08 — 10. týden

20080410

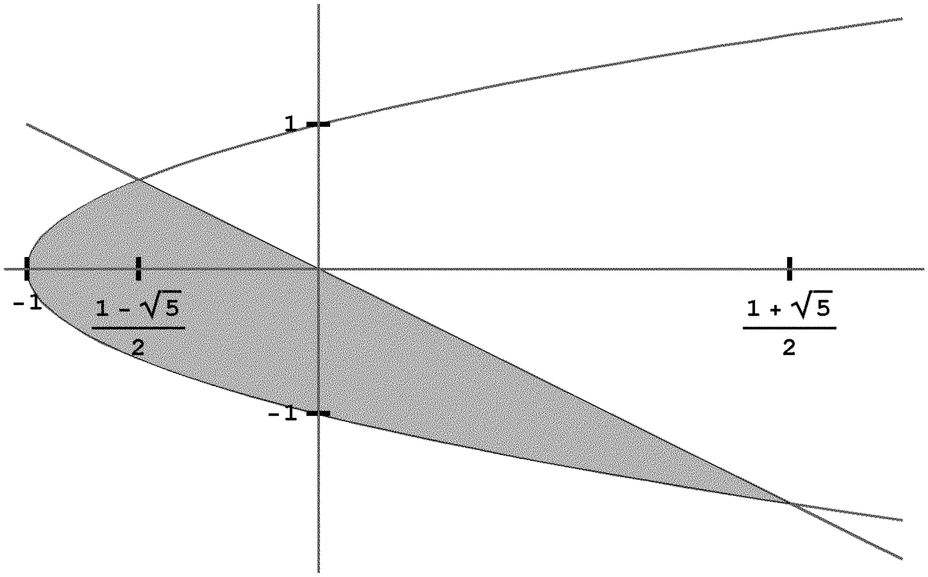
Aplikace integrálního počtu. Při probírání příkladů je nutné zmínit následující handicap. Z aplikací integrálního počtu se na přednášce rigorózně definují/odvozují pouze dvě věci — plocha pod spojitou nezápornou funkcí f na $\langle a,b\rangle$ je rovna $\int\limits_a^b f$ a vzoreček pro délku křivky v $\mathbb{R}^n$ je roven $\int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n}\varphi_j'^2(t)}\,\mathrm{d}t$. Z těchto dvou věcí je minimálně ta první na pováženou — plochu je přirozené definovat pomocí dvojrozměrného, ne jednorozměrného integrálu. Tím spíše to platí pro pojmy jako objem, těžiště, povrch atd. Tyto těžkosti však samozřejmě nebrání tomu počítat i v prvním ročníku příklady s touto tématikou, i když příslušné vzorce zůstanou rigorózně neodvozeny až do druhého ročníku.

Příklad: vzorec pro x-ovou souřadnici těžiště homogenního rotačního tělesa vzniklého rotací spojité nezáporné funkce f okolo osy x na $\langle a,b\rangle$ je $x_T = \dfrac{\int\limits_a^b x f(x)^2\mathrm{d}x}{\int\limits_a^b f(x)^2\mathrm{d}x}$, což lehce na cvičení „odvodíme“ (nebo říkejme spíše „lehce si zapamatujeme“) tak, že těžiště se obecně počítá jako podíl sum $\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k\vec{x}_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k}$, který v limitě přejde na uvedený vzorec (rozsekáme rotační těleso na malé skoroválečky o objemu (nevíme, co je objem!) $f(x)^2\mathrm{d}x$) apod.

---

1. Určete obsah plochy ohraničené křivkami $y^2=1+x$ a $x+y=0$.

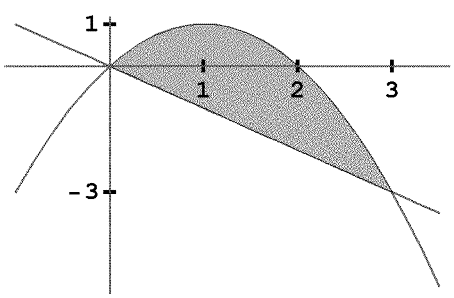
Návod. Řešením $\pm\sqrt{1+x} = -x$ dostaneme průsečíky grafů v bodech $x = \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Počítáme tedy obsah jako integrál (viz obrázek)



$$S=2\int_{-1}^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}(-x-(-\sqrt{1+x}))\,\mathrm{d}x=$$

$$=2\cdot\left[\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}-\left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}+\left[\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}=\underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{3}(3-\sqrt{5})^{\frac{3}{2}}-\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{8}{3}}}.$$

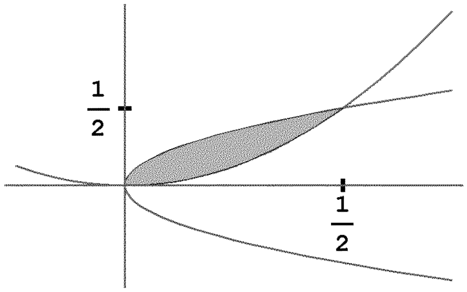
2. Vypočtěte plochu útvaru ohraničeného křivkami $y=2x-x^2$, $x+y=0$.
Návod.



Z obrázku je zřejmé, že

$$S=\int_0^3 2x-x^2-(-x)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^3=\underline{\underline{\frac{9}{2}}}.$$

3. Nalezněte těžiště oblasti ohraničené křivkami $y=2x^2$, $x=2y^2$.
Návod.



Pro souřadnice těžiště oblasti ohraničené funkcemi f, g a osami $x=a$, $x=b$ platí vzorce $x_T=\dfrac{\int_a^b x(f(x)-g(x))\mathrm{d}x}{\int_a^b (f(x)-g(x))\mathrm{d}x}$, $y_T=\dfrac{\frac{1}{2}\int_a^b (f(x)^2-g(x)^2)\mathrm{d}x}{\int_a^b (f(x)-g(x))\mathrm{d}x}$. Z obrázku je zřejmé, že v našem případě

$$x_T=\frac{\int_0^{\frac{1}{2}} x\left(\sqrt{\frac{x}{2}}-2x^2\right)\mathrm{d}x}{\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\frac{x}{2}}-2x^2\right)\mathrm{d}x}=\frac{\left[\frac{\sqrt{2}}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{x^4}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}}}{\left[\frac{\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}}}=\frac{\frac{3}{160}}{\frac{1}{12}}=\underline{\underline{\frac{9}{40}}},$$

protože obrazec je symetrický podle osy $y=x$, musí být obě souřadnice stejné, $x_T=y_T$. Pro kontrolu:

$$y_T=\frac{\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{2}-4x^4\right)\mathrm{d}x}{\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\frac{x}{2}}-2x^2\right)\mathrm{d}x}=\frac{\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{4}-\frac{4x^5}{5}\right]_0^{\frac{1}{2}}}{\left[\frac{\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}}}=\frac{\frac{3}{160}}{\frac{1}{12}}=\underline{\underline{\frac{9}{40}}}.$$

4. Vypočtěte délku křivky $y=x^{3/2}$ pro $x\in\langle 0,4\rangle$.

Návod. Počítáme délku podle vzorce $l=\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}\mathrm{d}x$, kde $f(x)=x^{\frac{3}{2}}$, odkud $f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$:

$$l=\int_0^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,\mathrm{d}x=\frac{4}{9}\int_1^{10}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t=\frac{4}{9}\left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^{10}=\underline{\underline{\frac{8(10\sqrt{10}-1)}{27}}}.$$

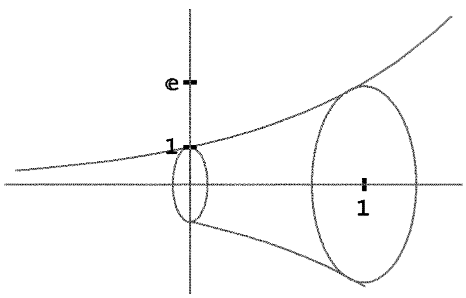
$$\begin{aligned}1+\frac{9}{4}x &= t\\ \frac{9}{4}\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t\end{aligned}$$

5. Nalezněte polohu těžiště polokoule o poloměru r.

Návod. Označme $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$. Pak pro x-ovou souřadnici těžiště platí (těžiště ze symetrie zřejmě leží na ose x) vzorec $x_T = \dfrac{\pi\int\limits_0^r x f(x)^2 \mathrm{d}x}{\pi\int\limits_0^r f(x)^2 \mathrm{d}x}$. V našem případě:

$$x_T = \frac{\int\limits_0^r x(r^2-x^2)\mathrm{d}x}{\int\limits_0^r (r^2-x^2)\mathrm{d}x} = \frac{\left[\frac{r^2x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_0^r}{\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^r} = \frac{\frac{r^4}{4}}{\frac{2r^3}{3}} = \underline{\underline{\frac{3r}{8}}}.$$

6. Vypočtěte povrch tělesa vzniklého rotací křivky $y=e^x$, $x\in\langle 0,1\rangle$ okolo osy x.
Návod.



Obsah plochy vytvořené rotací křivky y je dán vzorcem $S = 2\pi\int\limits_a^b y\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$. Z obrázku je zřejmé, že v našem případě

$$S=2\pi\int\limits_0^1 e^x\sqrt{1+e^{2x}}\mathrm{d}x = 2\pi\int\limits_1^e \sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t = 2\pi\int\limits_{\operatorname{argsinh}1}^{\operatorname{argsinh}e}\sqrt{1+\sinh^2 z}\cosh z\,\mathrm{d}z = 2\pi\int\limits_{\operatorname{argsinh}1}^{\operatorname{argsinh}e}\cosh^2 z\,\mathrm{d}z =$$

$$\begin{aligned} e^x &= t \\ e^x\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \end{aligned} \qquad \begin{aligned} t &= \sinh z \\ \mathrm{d}t &= \cosh z\,\mathrm{d}z \end{aligned}$$

$$=2\pi\int\limits_{\operatorname{argsinh}1}^{\operatorname{argsinh}e}\frac{1+\cosh 2z}{2}\mathrm{d}z = \pi\left[z+\frac{1}{2}\sinh 2z\right]_{\operatorname{argsinh}1}^{\operatorname{argsinh}e} =$$

$$=\pi\Big(\operatorname{argsinh}e-\operatorname{argsinh}1+\frac{1}{2}(\sinh(2\operatorname{argsinh}e)-\sinh(2\operatorname{argsinh}1))\Big).$$

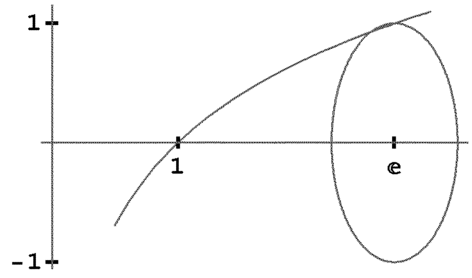
Protože $\cosh^2 y-\sinh^2 y=1$, je $\cosh y=\sqrt{1+\sinh^2 y}$. Dále $\sinh 2y = 2\sinh y\cosh y$, takže

$$\sinh(2\operatorname{argsinh}y) = 2\sinh\operatorname{argsinh}y\cosh\operatorname{argsinh}y = 2y\sqrt{1+y^2}.$$

Navíc $\operatorname{argsinh}x = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$ pro všechna x, takže

$$\underline{\underline{S=\pi\Big(\ln\frac{e+\sqrt{1+e^2}}{1+\sqrt{2}}+e\sqrt{1+e^2}-\sqrt{2}\Big)}}.$$

7. Nalezněte objem rotačních těles vzniklých rotací křivky $y=\ln x$, $x\in\langle 1,e\rangle$ a) okolo osy x, b) okolo osy y.
Návod.



Objem rotačního tělesa vzniklého rotací křivky y je dán vzorcem $V=\pi\int\limits_a^b y^2\mathrm{d}x$. Z obrázku je zřejmé, že v našem případě

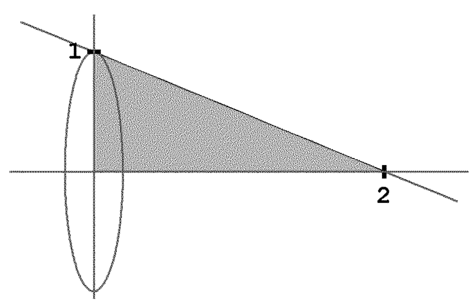
$$V_x=\pi\int\limits_1^e \ln^2 x\,\mathrm{d}x=\pi[x\ln x-x]_1^e=\pi(-(-1))=\underline{\underline{\pi}},$$

objem tělesa vzniklého rotací okolo osy y počítáme s pomocí inverzní funkce:

$$V_y=\pi\int\limits_0^1 (e^y)^2\mathrm{d}y=\pi\left[\frac{e^{2y}}{2}\right]_0^1=\underline{\underline{\frac{\pi(e^2-1)}{2}}}.$$

8. Nalezněte objem, povrch a těžiště rotačního tělesa vzniklého rotací křivky $y=$ $=1-\dfrac{1}{2}x$, $x\in\langle 0,2\rangle$ okolo osy x.

Návod.



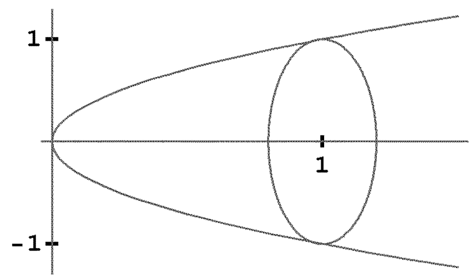
$$V=\pi\int\limits_0^2 y^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^2\left(1-\frac{1}{2}x\right)^2\mathrm{d}x=\pi\left(-\frac{2}{3}\right)\left[\left(1-\frac{x}{2}\right)^3\right]_0^2=\underline{\underline{\frac{2}{3}}}\pi,$$

$$S=2\pi\int\limits_0^2 y\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=2\pi\int\limits_0^2\frac{\sqrt{5}}{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=\sqrt{5}\pi\left[x-\frac{x^2}{4}\right]_0^2=\underline{\underline{\sqrt{5}\pi}},$$

$$x_T=\frac{\pi\int\limits_0^2 xy^2\mathrm{d}x}{\pi\int\limits_0^2 y^2\mathrm{d}x}=\frac{\pi\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{16}\right]_0^2}{\frac{2}{3}\pi}=\frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{2}{3}\pi}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

9. Vypočtěte objem, povrch a souřadnice těžiště rotačního paraboloidu daného rovnicí $y=\sqrt{x}$ pro $0\leqq x\leqq 1$.

Návod.



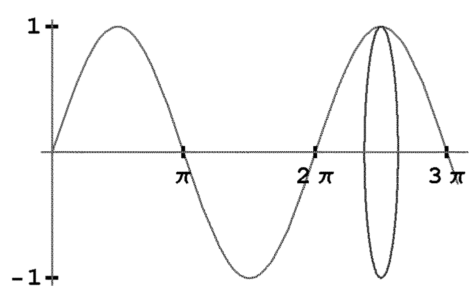
$$V=\pi\int_0^1 y^2\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\underline{\underline{\frac{\pi}{2}}},$$

$$S=2\pi\int_0^1 y\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=2\pi\int_0^1\sqrt{x+\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x=2\pi\left[\frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\underline{\underline{\frac{1}{6}(5\sqrt{5}-1)\pi}},$$

$$x_T=\frac{\pi\int_0^1 xy^2\,\mathrm{d}x}{\pi\int_0^1 y^2\,\mathrm{d}x}=\frac{\pi\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x}{\pi\int_0^1 x\,\mathrm{d}x}=\frac{\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1}{\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\underline{\underline{\frac{2}{3}}}.$$

10. Nalezněte objem a povrch rotačního tělesa vzniklého rotací křivky $y=\sin x$, $x\in\langle 0,3\pi\rangle$ okolo osy x.

Návod.



Je zřejmé, že stačí sečíst třikrát objem (povrch) tělesa vzniklého rotací křivky na intervalu $x\in\langle 0,\pi\rangle$:

$$V=3\cdot\pi\int_0^\pi y^2\,\mathrm{d}x=3\pi\int_0^\pi\sin^2 x\,\mathrm{d}x=3\pi\int_0^\pi\frac{1-\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x=3\pi\left[\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^\pi=\underline{\underline{\frac{3\pi^2}{2}}},$$

$$S=3\cdot 2\pi\int_0^\pi y\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=6\pi\int_0^\pi\sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=-6\pi\int_1^{-1}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t=$$

$$\begin{aligned}\cos x&=t\\ -\sin x\,\mathrm{d}x&=\mathrm{d}t\end{aligned}\qquad\qquad\begin{aligned}t&=\sinh z\\ \mathrm{d}t&=\cosh z\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

$$= -6\pi \int\limits_{\operatorname{argsinh} 1}^{-\operatorname{argsinh} 1} \sqrt{1+\sinh^2 z} \cosh z \, \mathrm{d}z = 6\pi \int\limits_{-\operatorname{argsinh} 1}^{\operatorname{argsinh} 1} \cosh^2 z \, \mathrm{d}z = 6\pi \int\limits_{-\operatorname{argsinh} 1}^{\operatorname{argsinh} 1} \frac{1+\cosh 2z}{2} \mathrm{d}z =$$

$$= 6\pi \left[\frac{z}{2} + \frac{\sinh 2z}{4} \right]_{-\operatorname{argsinh} 1}^{\operatorname{argsinh} 1} \mathrm{d}z = 3\pi (2 \operatorname{argsinh} 1 + \sinh(2 \operatorname{argsinh} 1)) = \underline{\underline{6\pi(\sqrt{2} + \operatorname{argsinh} 1)}}.$$

Další spousta příkladů s fyzikální tématikou je ve skriptech.