Cvičení MAB2 LS 2007/08 — 11. týden

20080421

Sčítání nejjednodušších řad. Nalézt součet naprosté většiny řad nedovedeme. Následující příklady patří k těm řídkým výjimkám, kdy to lze.

1. Nalezněte součet řady $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+3)}$. (Rozkladem na parc. zlomky) - vyjde $\frac{11}{18}$.

2. Nalezněte součet řady $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+2n}$. (Rozkladem na parc. zlomky) - vyjde $-\frac{1}{4}$.

3. Nalezněte součet řady $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\ldots$. (Rozkladem na parc. zlomky) - vyjde $\frac{1}{3}$.

4. Nalezněte součet řady $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n^2+n}$. (Rozkladem na parc. zlomky) - vyjde $2-\ln 4$.

Připomeňte, popř. je naučte: $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}-\ln n$ je ostře rostoucí, $y_n=\sum\limits_{k=1}^{n-1}-\ln n$ je ostře klesající a $\lim x_n=\lim y_n=C$.

Další příklady na euler. konst.: nalezněte součet řad

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n},\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2-1},\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\ln\sqrt{\frac{n+1}{n}}\right).$$

5. Nalezněte součet řady $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2(n+1)^2}$. Použijte v čitateli několikrát $1=1+n-n$ (rozložte na pc. zlomky). Předtím odvoďte, že $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$:

Z Moivrovy věty je

$$\frac{\cos nx+i\sin nx}{\sin^n x}=(\operatorname{cotg}x+i)^n,$$

odkud pro n liché subst. $n=2m+1$ a porovnáním imag. částí máme identitu

$$\frac{\sin(2m+1)x}{\sin^{2m+1}x}=\operatorname{Im}\sum_{k=0}^{2m+1}\binom{2m+1}{k}i^k\operatorname{cotg}^{2m+1-k}x=\sum_{k=0}^{m}\binom{2m+1}{2k+1}(-1)^k\operatorname{cotg}^{2(m-k)}x.$$

Když do ní dosadíme za $x=\frac{k\pi}{2m+1}$, $k=1,2,\ldots,m$, na levé straně je nula a protože je cotg na $(0,\frac{\pi}{2})$ prostá funkce, čísla $\operatorname{cotg}^2 x$ jsou pro uvedená k navzájem různá, takže polynom m-tého stupně $p(z)=\sum\limits_{k=0}^{m}\binom{2m+1}{2k+1}(-1)^k z^{m-k}$ je má všechny za své kořeny. Jejich součet (s mínusem) je podle Vietova vzorečku koeficient u $m-1$-ní mocniny, takže platí

$$\frac{\binom{2m+1}{3}}{\binom{2m+1}{1}}=\frac{(2m)(2m-1)}{6}=\sum_{k=1}^{m}\operatorname{cotg}^2\frac{k\pi}{2m+1},$$

odkud přičtením m

$$\frac{(2m)(2m-1)}{6}+m=\frac{(2m)(2m+2)}{6}=\sum_{k=1}^{m}\left(\operatorname{cotg}^2\frac{k\pi}{2m+1}+1\right)=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{2m+1}},$$

no a protože $\sin x<x<\operatorname{tg} x$ na $(0,\frac{\pi}{2})$ (dokáže se zderivováním), je $\frac{1}{\operatorname{tg} x}<\frac{1}{x}<\frac{1}{\sin x}$, tj. i $\operatorname{cotg}^2 x<\frac{1}{x^2}<\frac{1}{\sin^2 x}$, takže

$$\frac{(2m)(2m-1)}{6}<\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{2m+1}{k\pi}\right)^2<\frac{(2m)(2m+2)}{6},$$

odkud

$$\frac{(2m)(2m-1)}{(2m+1)(2m+1)}\frac{\pi^2}{6}<\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{k}\right)^2<\frac{\pi^2}{6}\frac{(2m)(2m+2)}{(2m+1)(2m+1)},$$

z čehož plyne požadované tvrzení.

6. Nalezněte součet řady $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2(n^2-1)}$. - vyjde $\frac{7}{4}-\frac{\pi^2}{6}$

7. Nalezněte součet řady $\sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt{2n+5}-\sqrt{8n+12}+\sqrt{2n-1})$. Vyjde, že podstatně diverguje. Upozorněte, že nelze zapsat

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt{2n+5}-\sqrt{8n+12}+\sqrt{2n-1})=\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{2n+5}-\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{8n+12}+\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{2n-1}!$$

8. Nalezněte součet řady $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{[\frac{n}{2}]}}{2^n}$. -vyjde $\frac{6}{5}$

9. Nalezněte součet řady $\sum_{n=1}^{+\infty}((-1)^n+(-1)^{2n})\frac{1}{2^n}$. - vyjde $\frac{2}{3}$

10. Nalezněte součet řady $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n!}}{3^n}$. V exp. je až na první dva členy sudé číslo, -vyjde $-\frac{7}{6}$.

11. Nalezněte součet řady $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{2^n}$. - pomocí triku s ozn. $f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}x^k$, pak $f_n'(x)=\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}\dots$ vyjde 2.

12. Nalezněte součet řady $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n-1}{n!}$. - odečte se, vyjde 1

Variace: Nalezněte součet řady $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n-\frac{3}{2}}{n!}$. Zde je již nutné připomenout, že $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}=e$:

Ozn. $c_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$. Víme, že $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ostře roste k e, $b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ ostře klesá k e. Protože podle bin. věty

$$a_n=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right),$$

závorky jsou <1, takže je $c_n>a_n$. Dále pro $m<n$ je

$$a_n\geqq 1+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right),$$

odkud lim. přechodem $e>c_m$.