Cvičení MAB2 LS 2007/08 — 12. a 13. týden

20080421

Konvergence řad

- nejprve jednoduché příklady:

1. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}$ - není splněna nutná podmínka konverg. $\lim a_n = 0$.

2. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\sqrt{\frac{n}{n+1}}$ - totéž.

3. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2+\sin n}{3+\sin n}\right)^n$ - pomocí odmocninového kritéria, fce $f(x)=\frac{2+x}{3+x}$ má maximum v bodě $x=1$ (zderivováním) - konverguje.

4. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^n$. Pokud řada konverguje, odhadněte shora její součet. - stejně, součet $\leqq \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 3$.

5. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{n-\ln n}$. - opět odmocnin. kriteriem, řada konverguje.

6. Rozhodněte o konvergenci resp. absolutní konvergenci řady $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$ - jde o řadu se stříd. znaménky (vypočtěte $\sin(\pi\sqrt{n^2+1}-\pi n)$ podle součt. vzorce). Posloupnost je monotónní, limita je nula, podle Leibnize konverguje. Absolutní konvergence: $|\sin(\pi\sqrt{n^2+1})| = |(-1)^n \sin(\pi\sqrt{n^2+1}-\pi n)|$, řada diverguje.

7. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\operatorname{cotg}(\pi\sqrt{n^2+1})$ - využ. $\operatorname{cotg}(\pi\sqrt{n^2+1}) = \operatorname{cotg}(\pi\sqrt{n^2+1}-\pi n)$ - není splněna nutná podmínka konvergence

8. Rozhodněte o konvergenci resp. absolutní konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2^n n!}{n^n}$ - řada absolutně konverguje. Podílovým kritériem vyjde $2/e<1$.

9. Rozhodněte o konvergenci resp. absolutní konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{n-3}{n+2}\right)^n$ - není splněna nutná podmínka konvergence, řada diverguje.

10. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2+(-1)^n}{n}$ - rozdělíme na 2 řady, první konverguje (dovedeme vypočítat dokonce součet), druhá je harm. řada - diverguje.

11. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n^2+n+1}}{\ln(n^2+n+1)}$ - jedná se o řadu se zápornými členy, řada diverguje (srov. kritériem).

12. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{n^2+n+1}}{\ln n}$ - jako v předch. příkladě, řada diverguje.

13. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\ln n}$ - integrálním kritériem - řada diverguje.

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{\ln n}}$ - platí $2^{\ln n}=n^{\ln 2}$, řada konverguje.

15. Rozhodněte o konvergenci resp. absolutní konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(1+x)^n}$, kde $x\in R$ - odmocninovým kritériem dostaneme, že řada konverguje pro $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$. Pro $x=-1$ zadání nemá smysl, pro $x=-2$ dovedeme vypočítat dokonce součet (řada konverguje), pro $x=0$ řada diverguje (jde o harmon. řadu), pro $x\in(-2,0)-\{-1\}$ řada diverguje, neboť není splň. nutná podm. konvergence.

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1{,}001^n}{n^{1{,}001}}$ - není splněna nutná podmínka konvergence, řada diverguje.

Konvergence řad - hezčí příklady

Rozhodněte o konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)n^3$ - diverguje, není splněna nutn. podm. konverg.:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)n^3=+\infty.$$

Rozhodněte o konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}$ - cauchyov. kritériem $\lim\sqrt[n]{a_n}=$

$$=\lim\frac{n}{\sqrt[n]{n}\sqrt{2n^2+n+1}\sqrt[n]{\sqrt{2n^2+n+1}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}<1 \text{ - řada konv.}$$

Rozhodněte o konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$ - podíl. kritériem

$$\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(2+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}=\lim\frac{2^n\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n}{2^{n+1}\left(1+\frac{1}{2(n+1)}\right)^{n+1}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}}=\frac{1}{2}<1$$

- řada konverguje.

Rozhodněte o konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}nx\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin^2(k\alpha)}{1+x^2+\cos^2(k\alpha)}$

- pro $x=0$ konverguje. Pro $x\neq 0$ použ. podíl. krit. v nelim. tv.:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)x\sin^2((n+1)\alpha)}{nx(1+x^2+\cos^2((n+1)\alpha)}\leq\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{1+x^2}$$

- je zřejmé, že díky faktu $\dfrac{1}{1+x^2}<1$ platí, že pro $n>$ vhodné n_0 je $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\leqq q$, kde $q<1$ - řada konverguje pro každé $x\neq 0$.

Rozhodněte o konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n!}}\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)$, kde $x>0$.

- podíl. krit: $\displaystyle\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\frac{1}{\sqrt{n+1}}\cdot\frac{\left(x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}\right)}{\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)}$ a to se dá zapsat jednak ve tvaru $\displaystyle\lim\frac{1}{\sqrt{n+1}}\cdot\frac{1+\frac{1}{x^{2n+2}}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{2n+1}}}$, z kterého je zřejmé, že řada konverguje pro $x\in(0,1)$ ($\lim =0$), a jednak ve tvaru $\displaystyle\lim\frac{1}{\sqrt{n+1}}\cdot\frac{x^{2n+2}+1}{x^{2n+1}+x}$, z kterého je zřejmé, že řada konverguje pro $x\in\langle 1,+\infty)$ ($\lim=0$). Řada tedy konv. pro každé x.

Rozhodněte o konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\underbrace{\frac{(n+1)!^n}{2!4!\ldots(2n)!}}_{a_n}$.

- pomocí podíl. krit. $\displaystyle\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\underbrace{\frac{(n+2)^n(n+2)!}{(2n+2)!}}_{b_n}$,

$$\lim\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^n\frac{(n+3)^2}{2(2n+3)(n+2)}=\frac{e}{4}<1$$

$\Rightarrow \lim b_n=0\Rightarrow$ řada konverguje. (Zopak. případně ukažte podílové kritérium pro vypočtení limity posloupnosti - je-li (b_n) posloupnost kladných čísel a $\lim\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=q<1$, pak $\lim b_n=0$ (důkaz: (b_n) je od jistého n_0 klesající $\Rightarrow$ má konečnou nezápornou limitu, a ta nemůže být nenulová, jinak by podle věty o limitě podílu $\lim\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{\lim b_{n+1}}{\lim b_n}=1\not<1$).)

Ukažte, že nelze v podílovém ani v odmocninovém kritériu zaměnit podmínku $\exists\, q<1\ \forall\, n\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\leqq q$ resp. $\exists\, q<1\ \forall\, n\ \sqrt[n]{a_n}\leqq q$ za podmínku $\forall\, n\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<1$ resp. $\forall\, n\ \sqrt[n]{a_n}<1$.

Protipříklad: harmonická řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$.

Rozhodněte o konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\underbrace{\frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}}_{a_n}$.

- využ. odmoc. krit. v nelim. tv.

$\displaystyle\sqrt[n]{a_n}=\frac{\sqrt[n]{n^3}(\sqrt{2}+(-1)^n)}{3}\leqq\sqrt[n]{n^3}\frac{\sqrt{2}+1}{3}$. Protože $\dfrac{\sqrt{2}+1}{3}<1$, je zřejmé, že od jistého n_0 bude $\sqrt[n]{a_n}\leqq q<1$, takže řada konverguje.

Rozhodněte o konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos^2\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{2^n}$ - pomocí odmoc. krit. v nelim. tvaru $\sqrt[n]{a_n}\leqq\frac{1}{2}$ - řada konverguje.

Rozhodněte o konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sqrt{n+a}-\sqrt[4]{n^2+n+b}$, kde $a,b\in\mathbb{R}$.

- vhodně rozšíříme - řada má stejný charakter jako řada (n_0 voleno tak velké, aby ve jmen. případně nevznikla nula) $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty}\frac{(2a-1)n+a^2-b}{\sum\limits_{k=0}^{3}\sqrt[4]{(n+a)^{2k}}\sqrt[4]{(n^2+n+b)^{3-k}}}$ - je zřejmé (srovn. krit.), že pro $a=\frac{1}{2}$ řada konv. $\forall\ b$ (neboť má stejný char. jako řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$); pro $a\neq\frac{1}{2}$ řada div. (neboť má stejný char. jako řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$).

Rozhodněte o konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p\ln\frac{n-1}{n+1}$, $p\in\mathbb{R}$.

- vidíme, že $(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p$ „se chová“ pro $n\to+\infty$ jako $\frac{1}{n^{\frac{p}{2}}}$, $\ln\frac{n-1}{n+1}=\ln\left(1-\frac{2}{n+1}\right)$ jako $\frac{1}{n}$, takže srovnáme s řadou $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\frac{p}{2}+1}}$, která konv. $\Leftrightarrow p>0$. Je

$$\lim\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p\ln\frac{n-1}{n+1}}{\frac{1}{n^{\frac{p}{2}+1}}}=-\frac{1}{2^{p-1}}\in\mathbb{R}-\{0\},$$

takže i pův. řada konv. $\Leftrightarrow p>0$.

Rozhodněte o konvergenci řad

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n n!}{n^n},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n n!}{n^n},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^n n!}{n^n},$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^n}{2^n n!},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^n}{3^n n!},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^n}{e^n n!}.$$

- první dvě jdou lehce pomocí podílového kritéria. U první vyjde $\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2}{e}$ - konverguje, druhá $\frac{3}{e}$ - diverguje. Třetí diverguje, na což stačí podílové kritérium v nelimitním tvaru(!): $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\geqq 1\ \forall\ n$.

U druhé trojice je vše podobně (první řada diverguje, druhá konverguje), ale u vyšetření poslední řady podílové kritérium selže, neboť $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e} < 1$. Je třeba použít Raabeovo kritérium:

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)}{e} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\frac{e}{n}} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{n}{1+\frac{1}{n}}\left(-\frac{1}{n^2}\right)\right)}{-\frac{e}{n^2}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\left(-\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{-2}{n^3}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{-\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{-2}{n^3}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{-1}{n(n+1)^2}}{\frac{-2}{n^3}} = \frac{1}{2} < 1,$$

řada diverguje.

Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\sqrt{2-a_n}}_{b_n}$, $a_1=\sqrt{2}, a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$

- víme ze ZS (případně rychle znovuodvodíme), že $\lim a_n = 2$ (je to logické, jinak by nebyla ani splněna nutná podmínka pro konverg. řady). Dále podíl. krit.

$$\lim \frac{b_{n+1}}{b_n} = \sqrt{\lim \frac{2-a_{n+1}}{2-a_n}} = \sqrt{\lim \frac{2-\sqrt{2+a_n}}{2-a_n}} = \sqrt{\lim \frac{(2-\sqrt{2+a_n})(2+\sqrt{2+a_n})}{(2-a_n)(2+\sqrt{2+a_n})}} =$$

$$= \sqrt{\lim \frac{1}{2+\sqrt{2+a_n}}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2},$$

takže řada konverguje.

Lze nalézt posloupnost (ε_n) tak, že $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ a přitom řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon_n}}$ konverguje?

Víme, že např. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ konverguje (lehce se ukáže integrálním kritériem). Je $x^{\log_x z} = z$, takže $n^{\log_n(\ln^2 n)} = \ln^2 n$, tj. volíme $\varepsilon_n = \log_n(\ln^2 n)$ (až na případ $n=1$, kde dáme $\varepsilon_1 =$cokoliv). Pak je skutečně $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$, neboť

$$\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(\ln^2 n)}{\ln n} = \frac{2 \ln\ln n}{\ln n} = 0.$$

Rozhodněte o konvergenci řady $\frac{a}{b}+\frac{a(a+c)}{b(b+c)}+\frac{a(a+c)(a+2c)}{b(b+c)(b+2c)}+\ldots$, kde $a,b,c>0$ - pomocí Gaussova kritéria:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a+nc}{b+nc}=1-\frac{b-a}{b+nc}=1-\frac{\frac{b-a}{c}}{\frac{b}{c}+n}=1-\frac{\frac{b-a}{c}}{n}+\left(\frac{\frac{b-a}{c}}{n}-\frac{\frac{b-a}{c}}{\frac{b}{c}+n}\right)=$$

$$=1-\frac{\frac{b-a}{c}}{n}+\frac{\frac{b(b-a)}{c(\frac{b}{n}+c)}}{n^2},$$

takže $\lambda=1$, $\mu=\frac{b-a}{c}$, konverguje pro $\frac{b-a}{c}>1$, diverguje pro $\frac{b-a}{c}\leqq 1$.

Pokud zbude čas, ve skriptech je samozřejmě spousta dalších vhodných příkladů na konvergenci.