Cvičení MAB2 LS 2007/08 — 1. a 2. týden

20080220

Protože na prvním cvičení obvykle není co cvičit, můžete „opakovat“ ze ZS, např.:

Lagrangeova věta o přírůstku funkce: f spojitá na $\langle a,b\rangle$, f' existuje na (a,b). Pak $\exists\ c\in(a,b)$: $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

• Nechť f je diferencovatelná na $\mathbb{R}$, $f(6)=-2$ a $f'(x)\leqq 10$. Jaká je největší možná hodnota pro $f(15)$?

$$f(15)=f(6)+f'(c)(15-6)\Rightarrow f(15)\leqq -2+90=88$$

• Dokažte, že polynom $p(x)=x^3+3x+1$ má jen jeden reálný kořen.

Návod. Je $p'(x)=3(x^2+1)>0$, takže p má nejvýše jeden kořen, neboť kdyby měl dva, podle věty o přírůstku funkce by někde mezi nimi musela být $p'(x)=0$. Protože např. $p(0)=1$ a $p(-1)=-3$ a p je spojitá, p má právě 1 reálný kořen.

• Funkce splňuje $f'(x)=\dfrac{1}{5-x^2}$ a $f(0)=2$. Odhadněte $f(1)=?$

Návod. Pro $0<x<1$ je $4<5-x^2<5$, takže $\dfrac{1}{5}<f'(x)<\dfrac{1}{4}$, no a

$$f(1)-f(0)=f'(c)(1-0)\Rightarrow \frac{11}{5}<f(1)<\frac{9}{4}.$$

• Dokažte pomocí věty o přírůstku funkce tyto nerovnosti:

a) $|\sin a-\sin b|\leqq|a-b|$ pro $a,b\in\mathbb{R}$,

b) $|\operatorname{arctg} a-\operatorname{arctg} b|\leqq|a-b|$ pro $a,b\in\mathbb{R}$,

c) $\dfrac{a-b}{a}<\ln\dfrac{a}{b}<\dfrac{a-b}{b}$ pro $0<b<a$.

Návod. Je

$$\sin a-\sin b=\cos c(a-b),\ c\in(a,b)\Rightarrow|\sin a-\sin b|\leqq|a-b|$$

apod.

Hezčí, ne tak primitivní příklady:

• Nechť diferencovatelná f: $\langle a,b\rangle\to\langle a,b\rangle$ splňuje pro všechna $x\neq y$

$$|f(x)-f(y)|<|x-y|.$$

Můžeme z toho vydedukovat, že existuje $M<1$ tak, že pro všechna x,y platí

$$|f(x)-f(y)|\leqq M|x-y|?$$

Návod. Nemůžeme. Uvažme protipříklad $f(x)=\sin x$, která mapuje $\langle 0,1\rangle\to\langle 0,1\rangle$. Podle věty o přírůstku funkce je

$$\sin x-\sin y=\cos c(x-y),\ c\in(0,1),$$

takže skutečně

$$|\sin x-\sin y|<|x-y|\ \forall\ x\neq y.$$

Pokud by ale existovala $M<1$ taková, že $|\sin x-\sin y|\leqq M|x-y|$, pak by $|\cos c|\leqq M$. Nyní stačí vzít $x=0$ a $y\to 0+$. Pak $c\to 0+$ a dostaneme $1\leqq M$ — spor.

• Definujme posloupnost (x_n) rekurentně takto: $x_0=1$, $x_{n+1}=\dfrac{1}{2+x_n}$. Vypočtěme $\lim x_n$.

Návod. Je zřejmé (dokážeme indukcí), že $0<x_n<\dfrac{1}{2}$. Rovnice $x=\dfrac{1}{2+x}$ má kořeny $-1\pm\sqrt{2}$, z toho kořen $\sqrt{2}-1\in(0,\frac{1}{2})$, takže to je jediný kandidát na limitu.

Z tabulky

$$x_0=1,\ x_1=\frac{1}{3},\ x_2=\frac{3}{7},\ x_3=\frac{7}{17},\ x_4=\frac{17}{41}$$

vidíme, že posloupnost (x_n) není monotónní, což, jak víme, je postačující podmínka pro existenci limity (kterou teď nelze použít). To nevadí, poradíme si jinak:

Označme $f(x)=\dfrac{1}{2+x}$. Pak $f'(x)=-\dfrac{1}{(2+x)^2}$. Navíc je

$$|f'(x)|=\frac{1}{(2+x)^2}<\frac{1}{4} \text{ na } (0,\tfrac{1}{2}).$$

Tedy podle věty o přírůstku funkce je

$$|x_{n+1}-(\sqrt{2}-1)|=|f(x_n)-f(\sqrt{2}-1)|\leqq\frac{1}{4}|x_n-(\sqrt{2}-1)|,$$

odkud dostaneme

$$|x_{n+1}-(\sqrt{2}-1)|\leqq\frac{1}{4}|x_n-(\sqrt{2}-1)|\leqq\left(\frac{1}{4}\right)^2|x_{n-1}-(\sqrt{2}-1)|\leqq\ldots\leqq\left(\frac{1}{4}\right)^n|x_1-(\sqrt{2}-1)|=$$
$$=\left(\frac{1}{4}\right)^n\left|\frac{4}{3}-\sqrt{2}\right|\to 0,$$

takže skutečně $\lim x_n=\sqrt{2}-1$.

Cauchyova věta o přírůstku funkce. Buď f, g spojité na $\langle a,b\rangle$. Nechť existují konečné f', g' na (a,b), nechť $g'\neq 0$ na (a,b). Pak $\exists\ c\in(a,b)$: $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

• Rozhodněte o platnosti tvrzení: Nechť f, g jsou spojité na $\langle a,b\rangle$. Pak nastává alespoň jedna z následujících situací:

1. existuje $\xi\in(a,b)$ takové, že $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$;
2. alespoň jedna z funkcí f, g nemá na (a,b) spojitou derivaci;
3. $g(a)=g(b)$.

Své rozhodnutí zdůvodněte.

Návod. Uvedené tvrzení neplatí. Prozkoumejme podrobně předpoklady Cauchyovy věty o přírůstku funkce: zde je předpoklad nenulové derivace g' na (a,b). Tento předpoklad je podstatný. Uvažme například dvojici funkcí $f(x)=x^3$ a $g(x)=x^2$ na intervalu $\langle a,b\rangle$, kde $a=-1+\varepsilon$, $b=1$ a $\varepsilon>0$ je dostatečně malé číslo. Pak obě tyto funkce jsou na $\langle a,b\rangle$ spojité, obě mají na (a,b) spojitou derivaci, ale $g'(0)=0$, a tedy není $g'\neq 0$ na (a,b). Dále máme

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{3\xi}{2},\quad \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{\varepsilon^2-\varepsilon+1}{\varepsilon}.$$

Vidíme, že pro $\varepsilon\to 0$ je podíl $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ obrovský, proto nemůže existovat $\xi\in(a,b)$ tak, aby mu bylo rovno číslo $\dfrac{3\xi}{2}$ (volíme konkrétně například $\varepsilon=0{,}1$, potom $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=9{,}1$). Neboli nenastává ani tvrzení (1), ani (2), ani (3).

Pokud by vám zbylo hodně času, zopakujte se studenty tabulku základních derivací — bude se hodit při počítání neurčitých integrálů.

Primitivní funkce (lze cvičit až po první přednášce, ta je ve středu v 7:30)

Základní pravidlo je, že primitivní funkci vždy hledáme ve všech (maximálních) otevřených intervalech, kde existuje, např.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| \text{ na } \mathbb{R}-\{0\} \quad (*) \text{ a ne jen } \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x \text{ na } \mathbb{R}^+ \quad (**).$$

V písemce u zkoušky (**) je považován za neúplný výsledek (a je za něj podstatně méně bodů).

Na začátek nějaké velejednoduché příklady, třeba:

$$\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}} dx \ , \qquad \int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}dx \ , \qquad \int \frac{x^2}{1+x^2} dx \ ,$$

$$\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1} dx \ , \qquad \int (2^x+3^x)^2 dx \ , \qquad \int x|x|\mathrm{d}x$$

$\int \max\{1,x^2\} dx$ — namalujte obrázek $f(x)$ i $F(x)$, připom. větu o lim. der.

$\int \sqrt{1-\sin 2x} dx$ nejprve na $(0,\frac{\pi}{4})$, na $(\frac{\pi}{4},\pi)$ a nakonec na $\mathbb{R}$

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx \ , \qquad \int \operatorname{cotgh}^2 x dx \ ,$$

$\int \sin 3x \sin 5x dx$ — vzoreček $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(-\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$.

Jednoduché příklady na per partes:

$$\int \ln x dx \ , \qquad \int x^2 e^{-x^2} dx \ , \qquad \int \arcsin x dx \ , \qquad \int x \operatorname{arctg} x dx \ .$$

Jednoduché příklady na substituci... upozorněte je na 2 rozdílné substituční metody a na to, že se vždy snažíme použít první z nich, protože její předpoklady jsou benevolentnější:

1:

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int f(x)\mathrm{d}x = F(x) = F(\varphi(t)) \text{ na } (c,d).$$

$$\varphi(t) = x \qquad \boxed{\varphi((c,d)) \subset (a,b) \quad F' = f \quad \varphi' \in \mathbb{R}}$$

$$\varphi'(t)\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$$

2:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = G(t) = G(\varphi^{-1}(x)) \text{ na } (a,b).$$

$$x = \varphi(t)$$

$$\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t \qquad \boxed{\varphi((c,d)) = (a,b) \quad G' = (f\circ\varphi)\varphi' \quad \varphi' \in \mathbb{R}, \varphi' \neq 0}$$

Příklady na první metodu:

$$\int x^2 \sqrt[3]{1+x^3}dx\ , \qquad \int \frac{xdx}{4+x^2}\ , \qquad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}\ ,$$

$$\int \operatorname{tg} x dx\ , \qquad \int x e^{-x^2} dx\ , \qquad \int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}\ , \qquad \int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}\ .$$

Příklady na druhou metodu:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$$

(pomocí $x = \operatorname{tg} t$, $x = \dfrac{1}{\cos t}$, pomocí hyperbolických funkcí)

Pokud zbyde čas, některé jednodušší příklady ze skript (1–153), např.

$$\int \frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x, \qquad \int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}\mathrm{d}x, \qquad \int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x, \qquad \int \frac{\sin x}{e^x}\mathrm{d}x, \qquad \int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x;$$

$$\int \sin^n x \mathrm{d}x, \qquad \int \cos^n x \mathrm{d}x \text{ – přes rekurentní vzorec.}$$

V dalších týdnech se budou počítat další neurčité integrály: integrace racionálních funkcí (rozklady na parciální zlomky, ..), integrace $R(e^x)$, kde R je rac. funkce, integrace $\dfrac{R(\ln x)}{x}$, $R(x, \sqrt[s]{\dfrac{ax+b}{cx+d}})$, $x^m(a+bx^n)^p$, $R(\sin x, \cos x)$ a různé goniometrické substituce, $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ a Eulerovy substituce.