Cvičení MAB2 LS 2007/08 — 4. týden

20080309

Program: dokončení zbylých příkladů na integrování racionálních funkcí. Zbytek týdne můžete počítat např. tyto příklady

a) na substituci $t=e^x$:

Integrujeme-li $\int R(e^x)\mathrm{d}x$, kde R je racionální funkce, můžeme integrál upravit na $\int \frac{R(e^x)e^x}{e^x}\mathrm{d}x$ a použít první substituční metodu se substitucí $t=e^x$.

Příklady:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{e^x+1}, \qquad \int \frac{e^x}{e^{2x}+3}\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{e^x+1}{(e^x-1)(e^{2x}-e^2)}\mathrm{d}x;$$

Pozn. ve 3. příkladu lze použít

$$\frac{t+1}{t(t-1)(t^2-e^2)} = \frac{1}{e^2 t} + \frac{2}{(1-e^2)(t-1)} + \frac{e+1}{2e^2(e-1)(t-e)} + \frac{e-1}{2e^2(e+1)(t+e)}.$$

b) na substituci $t=\ln x$:

Touto substitucí se dají zřejmě integrovat integrály typu $\int \frac{R(\ln x)}{x}\mathrm{d}x$, např.

$$\int \frac{5\ln x}{x(\ln^3 x+\ln^2 x-2)}\mathrm{d}x$$

Pozn.: zde lze využít

$$\frac{5t}{t^3+t^2-2} = \frac{5t}{(t-1)(t^2+2t+2)} = \frac{1}{t-1} - \frac{t+1}{t^2+2t+2} + \frac{3}{(t+1)^2+1}.$$

c) goniometrické substituce:

Pro počítání integrálů typu $\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$ na intervalu $(-\pi,\pi)$ (nebo jeho části), kde R je racionální funkce ve dvou proměnných, existuje substituce druhého druhu $z = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ (neboli $x = 2\operatorname{arctg} z$). Touto substitucí lze integrál vždy převést na integrál z racionální funkce:

Z rovnice $z=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, kde $x\in(-\pi,\pi)$, dostaneme

$$z^2 = \operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{1-\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}},$$

odkud plyne

$$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{z^2}{1+z^2}$$

a

$$\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{1+z^2}.$$

Odečtením máme

$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-z^2}{1+z^2},$$

dále z jednotkové kružnice odvodíme pro $x\in(-\pi,\pi)$ vztah

$$\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x}\,\mathrm{sgn}\,x=\sqrt{1-\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)^2}\mathrm{sgn}\,z=\sqrt{\frac{4z^2}{(1+z^2)^2}}\mathrm{sgn}\,z=\frac{2|z|\mathrm{sgn}\,z}{1+z^2}=\frac{2z}{1+z^2}.$$

Z původní rovnice $z=\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$ neboli $x=2\mathrm{arctg}\,z$ dostaneme

$$\mathrm{d}x=\frac{2}{1+z^2}\mathrm{d}z.$$

Původní integrál je tak převeden na integrál tvaru

$$\int R\left(\frac{2z}{1+z^2},\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)\frac{2}{1+z^2}\mathrm{d}z,$$

což je zcela zřejmě racionální funkce v proměnné z.

Příklad:

$$\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$$

(po substituci $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}=t$ přejde na $\int\frac{t^2+2t+1}{t^2+1}\mathrm{d}t=\int\left(1+\frac{2t}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t$). Prim. funkci nalezneme na $\mathbb{R}-\{\pi+2k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$.

Další příklad:

$$\int\frac{1+\sin x}{2+\cos x}\mathrm{d}x$$

Prim. funkce zde existuje na celém $\mathbb{R}$. Po $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}=t$ přejde na $\int\frac{(1+t)^2}{3+t^2}\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t=$ $=\int\left(\frac{2-2t}{3+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$. Po dosazení $t=\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$ ovšem musíme zespojiťovat v bodech $x=\pi+2k\pi$. Skok je $\frac{2}{3}\sqrt{3}\pi$. Nakonec vyjde

$$\int\frac{1+\sin x}{2+\cos x}\mathrm{d}x=$$

$$=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}+\ln\frac{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{3+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}+k\frac{2\pi}{\sqrt{3}} & \text{pro } x\in(-\pi+2k\pi,\pi+2k\pi),\ k\in\mathbb{Z}\\ \frac{\pi}{\sqrt{3}}+k\frac{2\pi}{\sqrt{3}} & \text{pro } x=\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}.$$

Ne vždy je zapotřebí používat substituci $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Pokud je neurčitý integrál tvaru $\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$ a funkce R splňuje

$$R(u,v) = -R(u,-v)$$

(tj. je „lichá v kosinu“), pak to znamená, že jde upravit na tvar

$$R(\sin x, \cos x) = \cos x \widetilde{R}(\sin x, \cos^2 x),$$

kde $\widetilde{R}$ je jiná rac. funkce, takže můžeme použít substituci $\sin x = t$ (prvního druhu).

Pokud platí naopak

$$R(u,v) = -R(-u,v)$$

(funkce je „lichá v sinu“), pak to znamená, že jde upravit na

$$R(\sin x, \cos x) = \sin x \widetilde{R}(\sin^2 x, \cos x),$$

takže lze použít subst. prvního druhu $\cos x = t$.

Konečně je-li

$$R(u,v) = R(-u,-v),$$

pak to znamená, že $R(u,v) = \dfrac{1}{\cos^2 x}\widetilde{R}(\operatorname{tg} x)$, takže lze použít substituci $\operatorname{tg} x = t$.

Těmto třem substitucím dáváme přednost proto, že vznikne racionální funkce, ve které jsou polynomy menších stupňů než u subst. $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Příklad:

$$\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x + 4\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

Po substituci $\operatorname{tg} x = t$ vznikne

$$\frac{t^2-1}{(t^2+1)(t^2+4)} = \frac{5}{3}\frac{1}{t^2+4} - \frac{2}{3}\frac{1}{t^2+1}.$$

Primitivní funkci lze nalézt na celém $\mathbb{R}$, skok je $\dfrac{\pi}{6}$ v bodech $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$:

$$\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x + 4\cos^2 x}\mathrm{d}x =$$

$$= \left\langle \begin{array}{ll} -\dfrac{2}{3}(x-k\pi) + \dfrac{5}{6}\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg} x}{2} + k\dfrac{\pi}{6} & \text{pro } x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{6} & \text{pro } x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array} \right. .$$

Některé další příklady:

$$\int \frac{dx}{1+\sin x}, \qquad \int \frac{dx}{2+\cos x}, \qquad \int \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x},$$

Proberte i jednoduché příklady typu

$$\int \sin^3 x dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x dx,$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos^4 x} = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x \cos^4 x} dx = \int \frac{\sin x}{(1-\cos^2 x)\cos^4 x} dx \ ,$$

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx \qquad \text{apod.}$$