Cvičení MAB2 LS 2007/08 — 5. týden

20080315

Program: Integrování funkcí typu $R\Big(x,\sqrt[s]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\Big)$ a $R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$ (Eulerovy substituce).

a) na substituci $R\Big(x,\sqrt[s]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\Big)$

Pozn.: $s>1$ je přirozené číslo, předpokládejme $ad-bc\neq 0$ (aby nešlo krátit). Použijeme substituční metodu druhého druhu s funkcí

$$x=\frac{dt^s-b}{a-ct^s},$$

(funkci vpravo získáme řešením rovnice $t=\sqrt[s]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$). Za definiční obor funkce $\dfrac{dt^s-b}{a-ct^s}$ volíme pokud možno takový otevřený interval (resp. sjednocení otevřených intervalů), aby byly splněny předpoklady věty o substituci a přitom její obor hodnot pokud možno pokrýval maximální otevřený interval resp. sjednocení otevřených intervalů, na kterém je definován integrand (abychom primitivní funkci spočítali všude, kde je to možné).

Příklady:

$$\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{2-x}}\mathrm{d}x$$

- zde je def. obor integrandu $\langle 1,2)$, takže integrujeme na $(1,2)$, substituce je

$$x=\frac{2t^2+1}{t^2+1},\quad t\in(0,+\infty),$$

Integrál přejde na $\displaystyle\int\Big(\frac{2}{t^2+1}-\frac{2}{2t^2+1}\Big)\mathrm{d}t$.

Horší příklad:

$$\int\frac{1}{x^2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\mathrm{d}x$$

- zde je def. obor integrandu $\mathbb{R}-\{0,1\}$. Chceme proto hledat primitivní funkci na $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$. Substituce

$$x=\frac{t^3+1}{t^3-1}$$

má nenulovou derivaci $-\dfrac{6t^2}{(t^3-1)^2}$ pro $t\in\mathbb{R}-\{0,1\}$ a zobrazuje intervaly $(-\infty,0)$, $(0,1)$ a $(1,+\infty)$ na intervaly $(-1,1)$, $(-\infty,-1)$ a $(1,+\infty)$. Proto první „rozpůlíme“ a použijeme substituci druhého druhu na intervalech $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ a $(1,+\infty)$, přičemž v bodě -1 musíme pak ve výsledku zespojiťovat (pokud náhodou nevyjde funkce spojitá — ona v tomto případě náhodou vyjde). Integrál přejde na

$$\int -\frac{6t^3}{(t^3+1)^2}\mathrm{d}t=$$

$$=\int\left(-\frac{2}{3}\frac{1}{t+1}+\frac{2}{3}\frac{1}{(t+1)^2}+\frac{1}{3}\frac{2t-1}{t^2-t+1}-\frac{5}{3}\frac{1}{t^2-t+1}-\frac{2t-1}{(t^2-t+1)^2}+\frac{1}{(t^2-t+1)^2}\right)\mathrm{d}t.$$

Další příklady:

$$\int\frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x,\qquad \int\frac{1}{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}\mathrm{d}x,$$

$$\int\frac{1}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}.$$

Těžší příklad:

$$\int x^2\sqrt{\frac{x+2}{x+4}}.$$

b) $R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$:

Uvažujme $a\neq 0$, b,c libovolné konstanty.

1. Pokud $a<0$ a kvadratický trojčlen ax^2+bx+c má reálné kořeny $\alpha<\beta$, je definiční obor integrandu podmnožinou $\langle\alpha,\beta\rangle$, takže se snažíme integrovat na nějakém podintervalu (α,β). Tam lze odmocnina upravit následovně:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}=\sqrt{-a(x-\alpha)(\beta-x)}=\sqrt{-a}(\beta-x)\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}},$$

takže postup je podobný jako v bodě a) viz výše.

Nebo lze upravit vnitřek odmocniny na čtverec a vhodně užít subsituce $\sin z$ resp. $\cos z$, integrand pak přejde na racionální funkci v $\sin z$ a $\cos z$.

Příklady:

$$\int x\sqrt{6+x-x^2}\mathrm{d}x$$

- integrujeme na $(-2,3)$. Upravíme na $\int x(3-x)\sqrt{\frac{x+2}{3-x}}$ a použijeme druhou substituční metodu

$$x=\frac{3t^2-2}{t^2+1},\qquad t\in\mathbb{R}^+,$$

integrál přejde na $\int\frac{150}{(t^2+1)^2}-\frac{400}{(t^2+1)^3}+\frac{250}{(t^2+1)^4}$.

Příklad na druhý postup:

$$\int\sqrt{-x^2+5x-4}\mathrm{d}x$$

- integrujeme na $(1,4)$. Upravíme

$$-x^2+5x-4=-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{9}{4}=\frac{9}{4}\left(1-\left(\frac{2x-5}{3}\right)^2\right),$$

substituujeme

$$x=\frac{1}{2}(3t+5)$$

kde $t\in(-1,1)$, a následně

$$t=\sin z,$$

kde $z\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

2. Pokud $a>0$, můžeme BÚNO předpokládat, že kvadratický trojčlen má nenulový diskriminant tj. dva reálné nebo dva imaginární kořeny (jinak viz výše); k výpočtu se užívá Eulerova substituce, která se obvykle zapisuje ve tvaru

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}x,$$

neboli

$$t=\sqrt{a}x+\sqrt{ax^2+bx+c}.$$

Proč je tato substituce výhodná: Jelikož je funkce $\sqrt{a}x+\sqrt{ax^2+bx+c}$ diferencovatelná všude, kde byla definovaná odmocnina (kromě krajních bodů) - tj. kde $ax^2+bx+c>0$, a jelikož tam má nenulovou derivaci

$$\sqrt{a}+\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

(kdyby byla nulová, byl by diskriminant nulový), je **všude** prostá, takže je prostá i funkce inverzní a ta má také nenulovu derivaci a můžeme přímo použít druhou substituční metodu a psát bez dlouhého ověřování

$$x=\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b},$$

kde za def. obor bereme vhodnou podmnožinu oboru hodnot funkce $\sqrt{a}x+\sqrt{ax^2+bx+c}$ (tu zjistíme podle def. oboru celého integrandu).

Příklad:

$$\int x\sqrt{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x$$

- zde hledáme prim. funkci na celém $\mathbb{R}$. Eulerova substituce je

$$x=\frac{t^2+4t+5}{2(t+2)^2},$$

protože obor hodnot $x+\sqrt{x^2+4x+5}$ je $(-2,+\infty)$ (jak zjistíme limicením v $\pm\infty$), bereme za interval do druhé substituční metody interval $(-2,+\infty)$. Integrál přejde na

$$\int\left(\frac{t^3-3}{8}-\frac{1}{t+2}-\frac{1}{8(t+2)^2}-\frac{1}{2(t+2)^3}-\frac{1}{8(t+2)^4}\right)\mathrm{d}t.$$

Další příklady:

$$\int\frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}\mathrm{d}x,\qquad\int\frac{1}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}\mathrm{d}x,$$

případně upozornění na příklady, které lze vhodněji počítat jinak než pomocí Eulerových substitucí, např.

$$\int\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x,\qquad \int\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x,\qquad \int x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x,$$

$$\int\sqrt{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x,\qquad \int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+x+1}},\qquad \int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3-x-x^2}},$$

$$\int\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x.$$