Cvičení MAB2 LS 2007/08 — 6. týden

20080324

Začne se pomalu cvičit určitý integrál.

a) Pomocí def. integrálu vypočtěte (uvažujte integrály $\int_0^1 x^p \mathrm{d}x$ a $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$):

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right),$$
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}},\ p>0.$$

Vyjde $\frac{\pi}{4}$, $\frac{1}{p+1}$.

b) jednoduché příklady na použití Newtonovy formule. Zopakujte znění věty, důležitost předpokladu, že prim. fce F musí být spojitá na celém $\langle a,b\rangle$.

Jednoduché příklady:

$$\int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x\ , \qquad \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\ , \qquad \int_{-1}^{1}\frac{x}{x^2+x+1}\mathrm{d}x\ ,$$

výsledky - $\frac{1}{6}(4\pi-3\sqrt{3})$, $\frac{53}{480}$, $\frac{1}{6}(\ln 27-\sqrt{3}\pi)$,

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+3x+1}} \qquad \text{- vyjde } \ln\left(1+\frac{2\sqrt{5}}{5}\right).$$

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \qquad \text{vytvořit rekurentní vztah.}$$

Poslední příklad vede k zajímavému vyjádření čísla π, z věty o nerovnostech máme $I_{2m} \geqq I_{2m+1} \geqq I_{2m+2}$ pro každé m, odkud dostaneme

$$\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\frac{\pi}{2} \geqq \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!} \geqq \frac{(2m+1)!!}{(2m+2)!!}\frac{\pi}{2},$$

takže

$$\frac{\pi}{2} \geqq \left(\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2m+1} \geqq \frac{2m+1}{2m+2}\frac{\pi}{2},$$

podle věty o limitě sevř. posl. je (rozšířením výrazem $\frac{2m+2}{2m+1}$, který má za limitu jedničku)

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot\ldots}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots} \qquad \ldots \text{ Wallisova formule.}$$

Podle potřeby lze použít libovolný z příkladů 449–526 ze skript Pelantová, Vondráčková, *Cvičení z matematické analýzy, Integrální počet a řady.*

Další příklady:

$$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}\quad \text{- vyjde } \frac{\pi}{\sqrt{3}},\qquad \int_{1}^{2}\frac{x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x\quad \text{- vyjde } \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}\quad \text{- vyjde } \frac{\sqrt{3}}{12}, \text{ použ. subst. } \frac{2-x}{2+x}=t,$$

$$\int_{0}^{1}\frac{1}{x^4+1}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}}{4}\ln(1+\sqrt{2})+\frac{\pi\sqrt{2}}{8},$$

zde rozkl. $\frac{1}{x^4+1}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}-\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)$,

použ. $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$ a $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, odkud $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$, $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}=\sqrt{2}+1$,

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}\frac{1+t^2-2t}{1+t^2+1-t^2}\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}=1-\ln 2,$$

$$\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{5x+2+3\sqrt{-x^2+x+2}}=-\int_{\sqrt{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{6t\mathrm{d}t}{(12-3t^2+9t)(1+t^2)}=$$

$$=\int_{\sqrt{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{8}{85}\frac{1}{t-4}+\frac{1}{5(t+1)}-\frac{5t+3}{17(t^2+1)}\right)\mathrm{d}t=$$

$$=\frac{8}{85}\ln\frac{4\sqrt{2}-1}{4-\sqrt{2}}-\frac{3}{34}\pi+\frac{6}{17}\operatorname{arctg}\sqrt{2} \text{ po subst. } t=\sqrt{\frac{2-x}{x+1}}$$

c) připomenout integrovatelné, neintegrovatelné funkce

- funkce spojité a monotónní jsou integrovatelné

- funkce neomezená na $\langle a,b\rangle$ není integrovatelná (pro ni jsme pojem určitý integrál vůbec nezavedli)

- neintegrovatelná je na $\langle a,b\rangle$ Dirichletova funkce, tj. $\chi(x)=1$ pro $x\in\mathbb{Q}$ a $\chi(x)=0$ pro $x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$.

- $\operatorname{sgn} x$ je integrovatelná na $\langle -1,1\rangle$, ale neexistuje k ní primitivní funkce

- a naopak funkce f definovaná na $\langle a,b\rangle$ mající primitivní funkci F na (a,b) spojitou na $\langle a,b\rangle$ nemusí být integrovatelná (uvaž. např. funkci $F(x)=x^2\sin\frac{1}{x^2}$ pro $x\neq 0$ a $F(0)=0$ pro $x=0$; f pak není omezená, proto nemá R. integrál)

- funkce f definovaná na (a,b) mající primitivní funkci F nemusí být na (a,b) spojitá (uvaž. např. funkci $F(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$ pro $x\neq 0$ a $F(0)=0$ pro $x=0$)

- spojitost není podmínkou integrovatelnosti, Riemannova funkce (tj. $f(x)=0$ pro x irac. a $f(x)=\frac{1}{q}$ pro $x=p/q$ rac., p,q nesouď.) je integrovatelná na jakémkoliv omezeném intervalu $\langle a,b\rangle$ a přitom je nespojitá ve všech bodech x, kde x je rac. Navíc nemá primitivní funkci na žádném intervalu (a,b).

- z integrovatelnosti f plyne integrovatelnost $|f|$, ale ne opačně (protipříklad - modifikovaná Dirichletova funkce)