Cvičení MAB2 LS 2007/08 — 7. týden

20080330

Integrály s celou částí a funkcí sgn:

$$\int_0^3 \operatorname{sgn}(x-x^3)\,\mathrm{d}x=-1,\ \text{..rozdělit na } \langle 0,1\rangle \text{ a } \langle 1,3\rangle,$$

$$\int_0^2 [e^x]\,\mathrm{d}x=14-\ln 7!$$

- zde lze využít substituce $x=\ln t$, takže

$$..=\int_1^{e^2}\frac{[e^{\ln t}]}{t}\mathrm{d}t=\int_1^{e^2}\frac{[t]}{t}\mathrm{d}t$$

a nyní pomocí odhadu platného pro každé $n\in\mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}<e<\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{1}{nn!}$$

dostaneme jednak

$$e<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2!}=\frac{11}{4},$$

odkud

$$e^2<\frac{121}{16}<\frac{124}{16}=\frac{31}{4}=7{,}75,$$

a z druhé strany

$$e>1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{8}{3},$$

odkud

$$e^2>\frac{64}{9}>\frac{63}{9}=7,$$

takže je

$$\int_1^{e^2}\frac{[t]}{t}\mathrm{d}t=\int_1^2+\int_2^3+\int_3^4+\int_4^5+\int_5^6+\int_6^7+\int_7^{e^2}=$$
$$=1\ln 2+2(\ln 3-\ln 2)+3(\ln 4-\ln 3)+4(\ln 5-\ln 4)+5(\ln 6-\ln 5)+$$
$$+6(\ln 7-\ln 6)+7(\ln e^2-\ln 7)=14-\ln 7!.$$

$$\int_1^{n+1}\ln[x]\,\mathrm{d}x\quad (n\in\mathbb{N})\ ..\ \text{pomocí}\ \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\ln[x]\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\ln k$$

... vyjde $\ln n!$

$$\int_0^6 [x]\sin\frac{\pi x}{6}\mathrm{d}x=\frac{30}{\pi}\ \dots\ \text{pomocí}\ -\sum_{k=0}^{5}k\frac{6}{\pi}\left[\cos\frac{\pi x}{6}\right]_k^{k+1}=$$

$$=-\frac{6}{\pi}\left(5\cos\pi-\cos\frac{5\pi}{6}-\cos\frac{4\pi}{6}-\cos\frac{3\pi}{6}-\cos\frac{2\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{6}\right)$$

.. vše se vyruší až na $-\frac{6}{\pi}\cdot 5\cos\pi=\frac{30}{\pi}$,

$$\int_0^\pi x\operatorname{sgn}(\cos x)\mathrm{d}x=-\frac{\pi^2}{4},$$

... pomocí $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{\pi^2}{8}-\left(\frac{\pi^2}{2}-\frac{\pi^2}{8}\right)=-\frac{\pi^2}{4}$.

Příklady na integrál jakožto funkci meze:

Zderivujte

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b \sin x^2\mathrm{d}x, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\int_a^b \sin x^2\mathrm{d}x, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}\int_a^b \sin x^2\mathrm{d}x$$

- vyjde 0, $-\sin a^2$, $\sin b^2$.

Zderivujte

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^2}^{x^3}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)\mathrm{d}t.$$

Deriv. jako slož. fci, např. $\varphi(x)=x^2$, $F(x)=\int_0^x\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t$, pak $F'(t)=\sqrt{1+t^2}$ a zajímá nás $F(\varphi(x))'=f(\varphi(x))\varphi'(x)$. V druhém a třetím příkladě se použ. $\int_{x^2}^{x^3}=\int_{x^2}^{a}+\int_a^{x^3}$, kde $a\in(x^2,x^3)$.

Vyjde $2x\sqrt{1+x^4}$, $\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}-\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$, $\sin x-\cos x$.

Příklady na limity s integrály:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t}{x}$$

.. jelikož $F(x)=\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t$ je spojitá v bodě 0, je $F(0)=0=\lim_0 F$, takže lze použít l'Hospitalovo pravidlo a napsat

$$...=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x^2}{1}=1.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int\limits_0^x \operatorname{arctg}^2 t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+1}} \quad \ldots \text{ opět l'Hospital.. vyjde } \frac{\pi^2}{4}.$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\left(\int\limits_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t\right)^2}{\int\limits_0^x e^{2t^2}\mathrm{d}t} \quad .. \text{ vyjde } 0.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int\limits_0^{\sin x}\sqrt{\operatorname{tg} t}\,\mathrm{d}t}{\int\limits_0^{\operatorname{tg} x}\sqrt{\sin t}\,\mathrm{d}t} \quad .. \text{ vyjde } 1.$$

Vypočtěte:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)\mathrm{d}t,$$

kde $f(t)=(1+\sin 2t)^{\frac{1}{t}}$ pro $t>0$ a $f(0)=0$.

Postup:

$$\lim_{t\to 0} f(t)=e^2$$

(pomocí l'Hospitalova pravidla) a dále $\lim\limits_{x\to 0}\int\limits_0^x f(t)\mathrm{d}t=0$ (neboť např. na $\langle -1,1\rangle$ je $|f(x)|<K$, kde K je vhodná konst. a $\left|\int\limits_0^x f(t)\mathrm{d}t\right|\leqq K|x|$), takže lze použít l'Hospitalovo pravidlo a je $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)\mathrm{d}t=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=e^2$.

Věty o střední hodnotě.

Zopakovat znění:

I. Buď f,g integrovatelné, $f\geqq 0$ na $\langle a,b\rangle$. Pak $\int\limits_a^b fg=\mu\int\limits_a^b f$, kde $\mu\in\langle \inf g_{\langle a,b\rangle}, \sup g_{\langle a,b\rangle}\rangle$.

II. Buď f integr., g mon. na $\langle a,b\rangle$. Pak $\int\limits_a^b fg=g(a)\int\limits_a^\xi f+g(b)\int\limits_\xi^b f$, kde $\xi\in\langle a,b\rangle$. Připom. speciální verzi pro $g\geqq 0$, g klesající ($\Rightarrow$ jde udělat $g(b)=0$).

Př.:

Rozhodněte znaménko integrálu $\displaystyle\int_0^{2\pi} x\sin x \mathrm{d}x$

- z 2. v. o stř. h. $=2\pi\displaystyle\int_\xi^{2\pi}\sin x\mathrm{d}x<0.$

Rozhodněte znaménko integrálu $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$

- nejde užít věta o stř. h., $\dfrac{1}{x}$ není integrovatelná (není omezená). Co lze: $..=\displaystyle\int_0^{\pi}+\int_\pi^{2\pi}=$

$$=\int_0^{\pi}\sin x\Big(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+\pi}\Big)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{\pi\sin x}{x(x+\pi)}\mathrm{d}x>0.$$

Rozhodněte znaménko integrálu $\displaystyle\int_{-2}^{2}x^3 2^x\mathrm{d}x$

- z 2. v. o stř. h $=2^2\displaystyle\int_\xi^{2}x^3\mathrm{d}x>0.$

Cvič. na větu $f<g$, f,g spoj. či integr. na $\langle a,b\rangle \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f<\int_a^b g$: Který integrál je větší?

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{10}x\mathrm{d}x$ nebo $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2}x\mathrm{d}x,$

- druhý, neboť $\sin^2 x>\sin^{10}x$ na $(0,\frac{\pi}{2})$,

$\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\mathrm{d}x$ nebo $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x,$

- druhý, neboť $e^{-x^2}>e^{-x}$, neboť $x^2<x$ na $(0,1)$,

$\displaystyle\int_0^{\pi}e^{-x^2}\cos^2 x\mathrm{d}x$ nebo $\displaystyle\int_\pi^{2\pi}e^{-x^2}\cos^2 x\mathrm{d}x?,$

- první, neboť $e^{-x^2}>e^{-(x+\pi)^2}$ na $(0,\pi)$.

Cvičení na odhady integrálů. První věta o stř. hodnotě:

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\cos x}\mathrm{d}x=\mu\cdot 2\pi=\frac{4}{3}\pi+\frac{2}{3}\pi\vartheta,\text{ kde } |\vartheta|<1.$$

$\mu\in\langle\frac{1}{3},1\rangle$

$$\int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x = \mu \int_0^1 x^9\,\mathrm{d}x = \frac{\mu}{10}$$

$$\mu \in \left\langle \tfrac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right\rangle$$

$$\int_0^1 \frac{x^{19}}{\sqrt[3]{1+x^6}}\,\mathrm{d}x = \mu \int_0^1 x^{19}\,\mathrm{d}x = \frac{\mu}{20}$$

$$\mu \in \left\langle \tfrac{\sqrt[3]{4}}{2}, 1 \right\rangle$$

$$\int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100}\,\mathrm{d}x = \mu \int_0^{100} e^{-x}\,\mathrm{d}x = \mu\left(1 - \frac{1}{e^{100}}\right)$$

$$\mu \in \left\langle \tfrac{1}{200}, \tfrac{1}{100} \right\rangle$$

Druhá věta o stř. hodnotě:

$$\int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{100\pi} \int_{100\pi}^{\xi} \sin x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{100\pi}\vartheta = \frac{1}{50\pi}\vartheta, \text{ kde } |\vartheta| \leqq 1, \text{ neboť } \left| \int_{100\pi}^{\xi} \sin x\,\mathrm{d}x \right| \leqq 2$$

OBECNĚ tedy máme obdobným postupem

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int_a^{\xi} \sin x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{a}\vartheta, \text{ kde } |\vartheta| \leqq 1.$$

Upozorněte, že první věta o stř. hodnotě naproti tomu dává mnohem hrubší odhad, který roste nade všechny meze, pokud $b \to +\infty$:

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \mu \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x} = \mu \ln\frac{b}{a}, \text{ kde } |\mu| \leqq 1.$$

$$\int_a^b \frac{e^{-\alpha x}\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{e^{-\alpha x}}{x} \cdot \sin x\,\mathrm{d}x = \frac{e^{-\alpha a}}{a}\int_a^{\xi} \sin x\,\mathrm{d}x =$$

$0 < a < b, \ \alpha \geqq 0$

$$= \frac{2}{a}\vartheta, \text{ kde } |\vartheta| \leqq 1, \text{ neboť } |e^{-\alpha a}| \leqq 1 \text{ a } \left| \int_a^{\xi} \sin x\,\mathrm{d}x \right| \leqq 2$$

$$\int_a^b \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_a^{\xi} \cos x\,\mathrm{d}x = \frac{2\vartheta}{\sqrt{a}}, \text{ kde } |\vartheta| \leqq 1$$

$0 < a < b$

Pěkný příklad:

$$\int\limits_a^b \sin x^2 \mathrm{d}x = \int\limits_a^b \frac{1}{x}\cdot x\sin x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int\limits_a^\xi x\sin x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\frac{1}{2}\int\limits_{a^2}^{\xi^2} \sin t \mathrm{d}t = \frac{2\vartheta}{2a} = \frac{\vartheta}{a},\text{ kde } |\vartheta| \leqq 1$$

$0 < a < b$

Podobným trikem můžeme jednoduše dokázat tuto větičku: Buď φ' rostoucí kladná spojitá na $\langle a,b\rangle$, pak $\left|\int\limits_a^b \cos\varphi(x)\mathrm{d}x\right| \leqq \frac{2}{\varphi'(a)}$.

Je totiž

$$\int\limits_a^b \cos\varphi(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \frac{1}{\varphi'(x)}(\cos\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\varphi'(a)}\int\limits_a^\xi (\cos\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{\varphi'(a)}\Big(\sin\varphi(\xi) - \sin\varphi(a)\Big).$$

Vypočtěte limity posloupností:

$$\lim_{n\to+\infty}\int\limits_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+0}\int\limits_0^{\xi_n} x^n \mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\frac{\xi_n^{n+1}}{n+1} = 0,\text{ neboť } 0 \leqq \xi_n \leqq 1$$

$$\lim_{n\to+\infty}\int\limits_n^{2n} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\int\limits_n^{\xi_n} \sin x \mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\frac{2\vartheta_n}{n} = 0,\text{ neboť } |\vartheta_n| \leqq 1$$