Cvičení MAB2 LS 2007/08 — 8. a 9. týden 20080407

Nevlastní integrál.

Příklady:

$$\int_{-e}^{1} \ln|x| \mathrm{d}x \text{ .. vyjde } -1$$

- pozor na nutnost ověření, že primitivní funkce $x(\ln|x|-1)$ k integrandu (fungující na $(-e,0)\cup(0,1)$) má konečné limity $\lim_{x\to 0\pm} x(\ln|x|-1)=0$.

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\cos x}{1+\sin x}\mathrm{d}x \text{ ... vyjde } 2\ln(1+\sqrt{2}),$$

$$\text{ale: } \int_{0}^{2\pi} \frac{\cos x}{1+\sin x}\mathrm{d}x \text{ diverguje}$$

- neboť primit. funkce $\ln(1+\sin x)$ fungující na $(0,\frac{3}{2}\pi)\cup(\frac{3}{2}\pi,2\pi)$ nemá kon. limity: $\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi\pm} \ln(1+\sin x)=-\infty$.

Důležité integrály:

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x = \frac{1}{1-\alpha} \text{ pro } \alpha<1, \text{ jinak div.,}$$

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha-1} \text{ pro } \alpha>1, \text{ jinak div.}$$

- odtud vyplývá, že $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ vždy div.

$\int_{0}^{+\infty} x^n e^{-x}\mathrm{d}x$, $n\in\mathbb{N}$ ... pomocí per partes, vyjde rek. vzorec $I_n=nI_{n-1}$, $I_0=$ $=1$, odkud $I_n=n!$

$$\int_{e}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^\alpha x} \text{ ... vyjde } \frac{1}{\alpha-1} \text{ pro } \alpha>1, \text{ jinak div.}$$

$$\int_{-5\pi}^{5\pi} \frac{\sin x}{2+\sin x}\mathrm{d}x \text{ ... užij. period. } 2\pi, \text{ pak}$$

$=5\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{2+\sin x}\mathrm{d}x$ - pomocí subst. $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}=t$ přejde na $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\mathrm{d}t}{(t^2+t+1)(t^2+1)}=$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big(\frac{2}{t^2+1}-\frac{2}{t^2+t+1}\Big)\mathrm{d}t=2\pi\Big(1-\frac{2}{\sqrt{3}}\Big).$$

$\int\limits_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}$ div., neboť $\int\frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}=\operatorname{argtgh}x$ a $\lim\limits_{x\to1-}\operatorname{argtgh}x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-1+}\operatorname{argtgh}x=-\infty$.

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{2x\mathrm{d}x}{x^2+1}$ div. - vysvětlete, proč nelze integrál „vypočítat“ pomocí substituce $t=$ $=x^2+1$ takto: $=\int\limits_{+\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t}=0$.

Další příklady:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+4)}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big(\frac{1}{3}\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{3}\frac{1}{x^2+4}\Big)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\pi,$$

$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^4)^3}\ldots$ pomocí $1+x^4=t$ .. vyjde $\frac{1}{4}(\ln 2-\frac{5}{8})$,

$\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-ax}\cos bx\mathrm{d}x$ pro $a>0$, $b\neq0$ - pom. per partes, vyjde $\frac{a}{a^2+b^2}$,

$\int\limits_{-1}^{1}\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$ .. pomocí substituce $x-\frac{1}{x}=t$ .. vyjde $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$,

dokažte, že $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ - pomocí substituce $\frac{-1}{x}=$ $=t$ a využijte předchozí příklad.

Pěkný příklad:

$$\int\limits_{0}^{1}\operatorname{sgn}(\sin(\ln x))\mathrm{d}x=-\operatorname{tgh}\frac{\pi}{2}.$$

Řeš. např. subst. $\ln x=t$, tj.

$$\int\limits_{0}^{1}\operatorname{sgn}(\sin(\ln x))\mathrm{d}x=\int\limits_{-\infty}^{0}e^t\operatorname{sgn}\sin t\mathrm{d}t=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0}e^t\operatorname{sgn}\sin t\mathrm{d}t=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{a_1}+\int\limits_{a_1}^{0},$$

kde a_1 je nejmenší číslo tvaru $-2\pi-2n\pi$, které je ještě $>a$. Protože $|a-a_1|\leqq2\pi$, první integrál je v abs. hodnotě jistě menší než $2\pi\cdot e^{a_1}$, což jde k nule pro $a\to-\infty$, proto ho můžeme vynechat a máme

$$\ldots = \lim_{n\to+\infty} \int_{-2\pi-2n\pi}^{0} e^t \operatorname{sgn}\sin t \,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_{-2\pi-2k\pi}^{-2k\pi} e^t \operatorname{sgn}\sin t \,\mathrm{d}t =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \Bigg(\int_{-2\pi-2k\pi}^{-\pi-2k\pi} e^t \mathrm{d}t + \int_{-\pi-2k\pi}^{-2k\pi} (-e^t)\mathrm{d}t \Bigg) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \Big(e^{-\pi-2k\pi} - e^{-2\pi-2k\pi} + (-e^{-2k\pi} + e^{-\pi-2k\pi}) \Big) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1+2e^{-\pi}-e^{-2\pi}) e^{-2k\pi} = (1-e^{-\pi})^2 \frac{1}{1-e^{-2\pi}} = -\frac{(1-e^{-\pi})^2}{(1-e^{-\pi})(1+e^{-\pi})} =$$

$$= \frac{e^{-\pi}-1}{e^{-\pi}+1} = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}}-e^{\frac{\pi}{2}}}{e^{-\frac{\pi}{2}}+e^{\frac{\pi}{2}}} = -\operatorname{tgh}\frac{\pi}{2}.$$

Ošklivější příklad:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(ax^2+bx+c)^n} \mathrm{d}x \text{ kde } n \in \mathbb{N} \text{ a } b^2-4ac<0.$$

Lze postupovat např. takto

$$= \frac{1}{a^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right)^n} = \frac{1}{a^n} \frac{1}{\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\left(\left(\frac{x+\frac{b}{2a}}{\sqrt{\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}}}\right)^2+1\right)^n} =$$

$$= \left(\frac{4a}{4ac-b^2}\right)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\left(\left(\frac{(2ax+b)\operatorname{sgn} a}{\sqrt{4ac^2-b^2}}\right)^2+1\right)^n},$$

provede se substituce $t = \frac{(2ax+b)\operatorname{sgn} a}{\sqrt{4ac^2-b^2}}$, $\frac{2|a|\mathrm{d}x}{\sqrt{4ac^2-b^2}} = \mathrm{d}t$, takže integrál přejde na

$$\left(\frac{4a}{4ac-b^2}\right)^n \frac{\sqrt{4ac^2-b^2}}{2|a|} I_n,$$

kde

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n} = \underbrace{\left[\frac{t}{(t^2+1)^n}\right]_{-\infty}^{+\infty}}_{0} + 2n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2+1-1}{(t^2+1)^{n+1}} \mathrm{d}t =$$

$$= 2n \Big(\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n}}_{I_n} - \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^{n+1}}}_{I_{n+1}} \Big),$$

takže z rekurentního vztahu

$$I_n = 2n(I_n - I_{n+1})$$

a z $I_1 = \pi$ máme

$$I_n = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\pi,$$

takže celý integrál je roven

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(ax^2+bx+c)^n}\mathrm{d}x = \left(\frac{4a}{4ac-b^2}\right)^n \frac{\sqrt{4ac^2-b^2}}{2|a|}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\pi.$$

Konvergence zobecněného Riemannova integrálu.

Začít s důležitými integrály..

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x = \frac{1}{1-\alpha} \text{ pro } \alpha < 1, \text{ jinak div.},$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha-1} \text{ pro } \alpha > 1, \text{ jinak div.}$$

- odtud vyplývá, že $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ vždy div.

Jednoduché příklady:

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+\sin x}\mathrm{d}x$ - konverguje, neboť $\frac{1}{x^2+\sin x} \geqq 0$ a $\frac{1}{x^2+\sin x} \leqq \frac{1}{x^2-1} \leqq \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ pro $x > a$, kde $a > 0$ je vhodná konst.

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{e^{-x^2}}\mathrm{d}x$ - diverguje, neboť $e^{x^2} \geqq 1$.

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}x$ - konverguje, neboť na $(0,1)$ je $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{2}{3}}} \leqq \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$ a na $(1,+\infty)$ je $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{2}{3}}} \leqq \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$.

$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$ - konverguje, neboť $\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\ln(1+x)}{x^{\frac{3}{2}}}}{\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}} = 1$ a $\lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{\ln(1+x)}{x^{\frac{3}{2}}}}{\frac{1}{x^{\frac{5}{4}}}} = 0$.

$\int_0^2 \frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x$ - kr. body jsou 0, 1 - rozdělíme na 3 integrály: $\int_0^{\frac{1}{2}}$, $\int_{\frac{1}{2}}^1$ a $\int_1^2$. Poslední z nich diverguje, neboť $\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{\dfrac{1}{\ln x}}{\dfrac{1}{x-1}}=1$ a $\displaystyle\int\limits_1^2 \frac{1}{x-1}\mathrm{d}x$ div.

Důležitý příklad:

Rozhodněte o konvergenci resp. absolutní konvergenci integrálu $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$, kde $\alpha\in R$.

Vyšetřujeme zvlášť integrály $\displaystyle\int\limits_0^1$ a $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty}$.

Je

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\dfrac{\sin x}{x^\alpha}}{\dfrac{1}{x^{\alpha-1}}}=1,$$

takže integrál konverguje pro $\alpha-1<1$, tj. $\alpha<2$.

Druhý integrál $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty}$ pro $\alpha>1$ jistě konverguje, neboť

$$\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right|\leqq\frac{1}{x^\alpha}. \tag{1}$$

Pro $\alpha\in(0,1\rangle$ lze použít BCP:

$$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ c\in(1,+\infty)\ \forall\ x_1,x_2\in(c,+\infty)\colon \left|\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{\sin x}{x^\alpha}\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

Podle druhé věty o střední hodnotě je

$$\left|\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{\sin x}{x^\alpha}\mathrm{d}x\right|=\left|\frac{1}{x_1^\alpha}\int\limits_{x_1}^{\xi}\sin x\mathrm{d}x\right|=\frac{1}{x_1^\alpha}\left|\int\limits_{x_1}^{\xi}\sin x\mathrm{d}x\right|\leqq\frac{2}{x_1^\alpha},$$

$$\xi\in\langle x_1,x_2\rangle$$

takže stačí pro dané $\varepsilon>0$ volit $c=\sqrt[\alpha]{\dfrac{2}{\varepsilon}}$. Integrál konverguje. Alternativně lze konvergenci ukázat přímo z Dirichletova kritéria (probraného na přednášce).

Pro $\alpha\leqq 0$ je integrál divergentní: dle BCP stačí ukázat

$$\exists\ \varepsilon>0\ \forall\ c\in(1,+\infty)\ \exists\ x_1,x_2\in(c,+\infty)\colon \left|\int\limits_{x_1}^{x_2}x^{-\alpha}\sin x\mathrm{d}x\right|\geqq\varepsilon.$$

Volme $x_1=2k\pi$, $x_2=2k\pi+\pi$, kde $k>\dfrac{c}{2\pi}$. Pak

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} x^{-\alpha}\sin x\,\mathrm{d}x\right| \geqq \int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} \sin x = 2.$$

Integrál $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ tedy konverguje pro $\alpha \in (0,2)$.

Absolutní konvergence: Protože pro první integrál je

$$\int_0^1 \left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha}\mathrm{d}x,$$

lze využít předchozího výsledku a konstatovat, že konverguje pro $\alpha < 2$.

Z rovnice (1) dále vidíme, že druhý integrál pro $\alpha > 1$ konverguje.

Pro $\alpha \in (0,1\rangle$:

$$\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| \geqq \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} = \frac{1}{2x^\alpha} - \frac{\cos 2x}{2x^\alpha}.$$

Integrál $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x^\alpha}\mathrm{d}x$ konverguje – z Dirichl. kritéria - nebo z BCP:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ c \in (1,+\infty)\ \forall\ x_1, x_2 \in (c,+\infty): \left|\int_{x_1}^{x_2} \frac{\cos 2x}{2x^\alpha}\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

Podle druhé věty o střední hodnotě je

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} \frac{\cos 2x}{2x^\alpha}\mathrm{d}x\right| = \left|\frac{1}{2x_1^\alpha}\int_{x_1}^{\xi} \cos 2x\,\mathrm{d}x\right| = \frac{1}{2x_1^\alpha}\left|\int_{x_1}^{\xi} \cos 2x\,\mathrm{d}x\right| \leqq \frac{1}{2x_1^\alpha},$$

takže stačí pro dané $\varepsilon > 0$ volit $c = \sqrt[\alpha]{\dfrac{1}{2\varepsilon}}$. Protože $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^\alpha}\mathrm{d}x$ diverguje, diverguje i integrál $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| \mathrm{d}x$.

Pro $\alpha \leqq 0$ integrál $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| \mathrm{d}x$ také diverguje, neboť divergoval i integrál bez absolutní hodnoty.

SHRNUTÍ: integrál $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ konverguje pro $\alpha \in (0,2)$, absolutně konverguje pro $(1,2)$.

Příklad, že nemusí platit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ pokud $\int\limits_1^{+\infty} f$ konverguje: Vyšetřete konvergenci integrálu $\int\limits_1^{+\infty} x\cos(e^x)\mathrm{d}x$.

- tento integrál konverguje, neboť $\int\limits_1^{+\infty} x\cos(e^x)\mathrm{d}x=\int\limits_1^{+\infty} \underbrace{\frac{x}{e^x}}_{g(x)}\underbrace{e^x\cos(e^x)}_{f(x)}\mathrm{d}x$ a podle Dirichletova krit. (g je monot. s lim.$=0$ a $\left|\int\limits_1^{x} e^x\cos(e^x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int\limits_e^{e^x}\cos t\mathrm{d}t\right|\leqq 2$) integrál konverguje.

Další příklady:

$\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x$ - konverguje, roztrhneme na $\int\limits_0^{\frac{1}{2}}+\int\limits_{\frac{1}{2}}^1$ a využ. $\lim\limits_{x\to0+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$.

$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ - konverguje

$\int\limits_0^{+\infty}\frac{x-\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$, $p\in\mathbb{R}$ - konverguje pro $p\in(2,4)$. Upozorněte, že nelze roztrhnout na $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x}{x^p}-\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}$. Využ. $\int\limits_0^{+\infty}=\int\limits_0^1+\int\limits_1^{+\infty}$ a dále $\int\limits_0^1\frac{x-\sin x}{x^p}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\frac{x-\sin x}{x^3}\cdot\frac{1}{x^{p-3}}\mathrm{d}x$ a využ. $\lim\limits_{x\to0+}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$, takže $\int\limits_0^1$ konverguje pro $p-3<1\Leftrightarrow p<4$. Co se týče $\int\limits_1^{+\infty}$:

$\int\limits_1^{+\infty}\frac{x-\sin x}{x^p}\mathrm{d}x=\int\limits_1^{+\infty}\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{x^{p-1}}\mathrm{d}x$, takže $\int\limits_1^{+\infty}$ konv. pro $p-1>1$, tj. $p>2$.

$\int\limits_7^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ - konverguje

$\int\limits_2^{+\infty}\frac{1}{x^p\ln^q x}\mathrm{d}x$, $p,q\in\mathbb{R}$ - konverguje pokud $p>1$ nebo $p=1,q>1$.

$\int\limits_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x+2\sin x}\mathrm{d}x$ - konverguje, ale ne absolutně. Upozorněte, proč nelze přímo použít

Dirichletovo krit. ($x+2\sin x$ není monot.). Co lze udělat: víme, že $\int\limits_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$ konverguje (viz př. strana příp. Dirichlet). Vyšetříme proto integrál $\int\limits_2^{+\infty} \Big(\frac{\sin x}{x+2\sin x} - \frac{\sin x}{x}\Big) \mathrm{d}x = = \int\limits_2^{+\infty} \frac{-2\sin^2 x}{x(x+2\sin x)} \mathrm{d}x$. Ten konverguje, neboť $\left|\frac{-2\sin^2 x}{x(x+2\sin x)}\right| \leqq \frac{2}{x(x-2)}$. Proto i původní integrál konverguje.